Kettingbreuken en het Planetarium van Christiaan Huygens

Renée Hoogveld

$$5 + \cfrac{1}{o + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{o + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{6}}}}}}}}}}}$$

Bachelor Scriptie Wiskunde
Onder begeleiding van Wieb Bosma
Radboud Universiteit Nijmegen

Inhoudsopgave

1 Inleiding **4**

2 Wie was Christiaan Huygens? **5**

3 Beschrijving van het Planetarium **7**
3.1 Het vooraanzicht 7
3.2 Het inwendige 8

4 Kettingbreuken **10**
4.1 Huygens' slimme idee 10
4.2 Kettingbreuken 12
4.3 Stellingen over kettingbreuken 13

5 De toepassing van kettingbreuken in het planetarium **23**
5.1 Aan welke eisen moeten de tandwielen voldoen? 23
5.2 De tandwielen in het planetarium 24
5.3 Hoeveel wijkt het planetarium af? 27
5.4 Een verbetering 29

6 Bibliografie **32**

7 Bijlage **33**

1 Inleiding

Voor het behalen van je Bachelor Wiskunde, moet je tegenwoordig een Bachelor Scriptie schrijven. Dit is die van mij.

Ik heb me verdiept in het planetarium van Christiaan Huygens, die voor dit ontwerp de kettingbreuken heeft 'uitgevonden'. Tijdens het vak Algoritmische Getaltheorie van Wieb Bosma, kwam ik voor het eerst in aanraking met het planetarium. Vandaar ook dat ik aan Wieb gevraagd heb om mij te begeleiden, waarop hij gelukkig 'ja' antwoordde.

Er is nog niet veel over het planetarium geschreven. Ik heb mijn informatie dan ook moeten halen uit vrij oude boeken, geschreven in het Latijn of Frans. Gelukkig was er een nederlandse vertaling, die soms tot enige frustratie leidde aangezien die niet helemaal overeen kwam met de originele boeken.
Zoals waarschijnlijk bij elke scriptie, kan je altijd doorgaan met schrijven. Maar er moet een keer een eindstreep in zicht zijn. Uiteindelijk heb ik de eindstreep gezien, dit is het eindresultaat.

Veel plezier met lezen.

2 Wie was Christiaan Huygens?

Christiaan Huygens werd op 14 april 1629 geboren. Hij was de zoon van Constantijn Huygens, die bekend was vanwege zijn muziek en zijn gedichten (zowel in het Nederlands als in het Latijn). Hij was de tweede van in totaal vijf kinderen. Toen hij acht jaar oud was, overleed zijn moeder. Ondanks deze treurige gebeurtenis had Christiaan toch een gelukkige jeugd. Al op vroege leeftijd (van z'n 16^e tot z'n 18^e) ging Christiaan in Leiden studeren en studeerde hij over wiskunde, sterrenkunde, rechten en muziektheorie.

Op zijn achttiende ging Christiaan in Breda aan het College van Oranje verder studeren. Zijn vader was de oprichter hiervan. Meteen hierna nam hij nog deel aan een diplomatieke reis naar Denemarken samen met zijn vader, maar meteen daarna, besloot hij dat hij gefinancieerd door zijn vader zich voortaan aan de wiskunde en de natuurwetenschappen ging wijden.

Tijdens zijn studiejaren, kwam Christiaan in contact met Mersenne[1]. Mersenne legde hem problemen voor, waar hij over na dacht. Hij schreef z'n gedachten erover op en zond ze dan terug naar Mersenne. Dit alles ging per brief. Het waren vaak problemen over wiskunde en mechanica, maar ook wel eens problemen over muziektheorie. Op deze manier werd Christiaan ingeleid in de lopende wetenschappelijke discussies. Hij en Mersenne bleven veel brieven schrijven, totdat Mersenne in 1648 overleed. Ze hebben elkaar nooit ontmoet.

De rest van zijn leven heeft Christiaan zich aan de wetenschap gewijd en is onder andere bekend geworden door zijn lichttheorie en zijn 31-toonstemming. Ook heeft hij zich aan vele wiskundige problemen gewaagd en zo onder andere beginselen gelegd voor de integraalrekening, en de waarschijnlijkheidsleer. Ongebruikelijk voor iemand uit zo'n nette familie was dat hij ook graag met zijn handen werkte. Zo heeft hij vele nuttige en handige instrumenten ontworpen, zoals het slingeruurwerk en een verbetering van telescopen. Met die telescopen heeft hij een satelliet en de ring van Saturnus ontdekt heeft.

In 1666 werd de Académie Royale des Sciences opgericht, een wetenschappelijke academie in Parijs. Christiaan werd door de Franse koning Lodewijk XIV uitgenodigd om hier leiding te geven. Zo heeft hij lange tijd een leidende rol kunnen spelen op het Europese wetenschappelijke gebied en wordt hij ook wel een van de pioniers van de wetenschappelijke revolutie genoemd.

In 1680 begon Christiaan met het ontwerp voor een planetarium, dat bestemd

1. een beroemde franse wiskundige en wetenschapper

was voor de Académie Royale des Sciences. Het ontwerp was af in 1682 en laat op schaal de banen en posities zien van de planeten rond de zon. In dit planetarium zaten vele technische vondsten: Christiaan bedacht een manier om de elliptische banen van de planeten te benaderen in excentrische cirkels, een slimme manier om het geheel aan te drijven (met een spiraalveer) en hij bedacht de kettingbreukontwikkeling, zodat de omlooptijden van de planeten heel goed benaderd konden worden. De instrumentmaker Johannes van Ceulen kreeg later de eer dit planetarium te bouwen. Het planetarium is tegenwoordig te bezichten in Museum Boerhaave te Leiden.

In 1681 wordt hij ziek en besluit terug naar Den Haag te gaan. Uiteraard blijft hij bezig met onderzoek en publiceren van de resultaten ervan, tot hij op zijn 66^e, op 9 juli 1695 overlijdt.

Christiaan Huygens

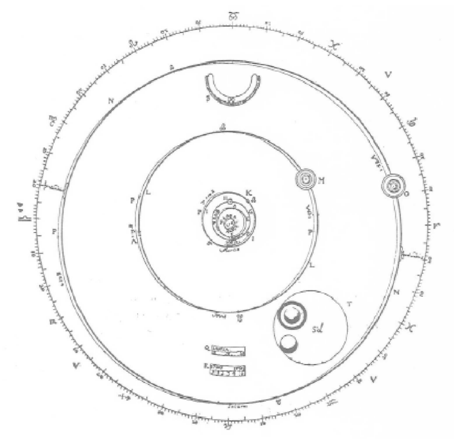
3 Beschrijving van het Planetarium

In dit hoofdstuk zal ik uit leggen hoe het planetarium precies gebouwd is. Behalve dat het planetarium er heel mooi uitziet, is het ontwerp slim verzonnen, en zijn er voor lastige praktische problemen handige oplossingen bedacht.Graag zou ik tot in detail uitleggen hoe alles precies ontworpen en gemaakt is, maar ik beperk me in deze scriptie tot de essentiële informatie.
Wie dit graag allemaal in detail wilt weten, kan in de verzamelde werken van Christiaan Huygens[2] of in het Planetarium Boek van Eise Eisinga[3] alles nog eens nalezen. Voor meer gegevens over deze boeken verwijs ik naar de bibliografie.
Een paar slimme ideëen van zijn ontwerp:

- Christiaan heeft een ingesloten zelflopend uurwerk in het planetarium gebouwd, zodat je met de hand honderd jaar terug[4], en twee honderd jaar vooruit kon kijken naar de stand van de planeten ten opzichte van de zon.
- Het ontwerp bevat een speciale constructie met een spiraalveer, zodat je het planetarium maar eens in de week hoeft op te winden.
- Behalve dat de planeten nu om de zon heen draaien, draait ook in het planetarium de maan om de Aarde.

En ga zo maar door. . .

3.1 Het vooraanzicht



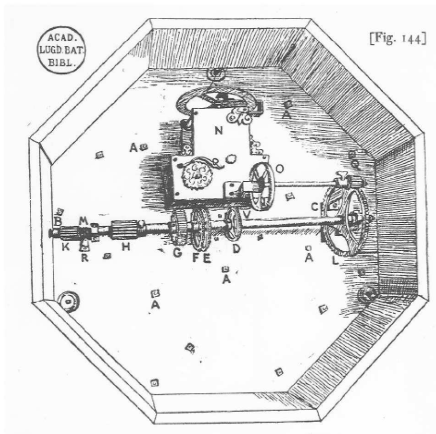
Op het plaatje hiernaast is de voorkant te zien. In het midden van de plaat zie je de zon, deze zit vast. Om de zon heen zijn de banen van de planeten uitgesneden in cirkels en door elke
'gleuf' steekt een pinnetje met daaraan een bolletje, de planeet. Van ver van de zon tot dichtbij de zon, zie je de banen van Saturnus, Jupiter, Mars, Aarde, Venus, Mercurius[5]. De bollen die de paneten voorstellen, zijn

2. deze zijn er in het latijn en frans
3. als frans of latijn niet je sterkste kant is. . .
4. ten opzichte van 1682, het jaar dat het planetarium voltooid was
5. meer planeten waren er in die tijd niet bekend

niet op schaal gemaakt, dat zou erg lastig zijn aangezien de zon veel groter is dan de planeten. Verder is er op de voorkant de cirkel der Ecliptica te zien. Dat is de baan die de zon in de loop van één jaar tussen de sterren maakt, gezien vanaf de aarde. De 'zonnebaan' loopt dan door de twaalf sterrenbeelden van de dierenriem. De Ecliptica cirkel, is verdeeld in de twaalf sterrenbeelden en 360 graden en omvat alle planeetbanen. Zo kan je met behulp van het planetarium ook zien, welk sterrenbeeld er 's avond aan de hemel is te zien!
Als je goed kijkt, zie je tussen de banen van Saturnus en Jupiter twee kleine rechthoekige openingen. Daar kan je zien op welke dag en op welk jaar het planetarium 'ingesteld' staat. Tussen de banen van Jupiter en Mars, is een halve cirkel vormige opening te zien. Hier kan je zien op welk uur en op welke minuut het planetarium 'ingesteld' staat.
Verder is vernoemens waardig dat alles van erg mooi materiaal gemaakt is en dat het planetarium erg mooi versierd en afgewerkt is. De voorkant alleen al is een lust voor het oog, maar voor het verdere vervolg van deze scriptie is het van groot belang dat ook het inwendige wordt besproken.

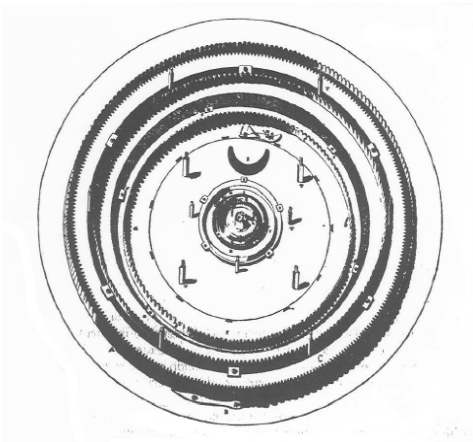
3.2 Het inwendige

Het plaatje hiernaast krijg je te zien als je het planetarium omdraait, de deksel eraf haalt en in de binnenkant van de deksel kijkt. In het midden zit een horizontaal lopende ijzeren as, die bijna de hele breedte inneemt.
Aan die as zitten zes tandwielen, voor elke planeet een. Op het plaatje zie je helemaal rechts ook nog een zevende tandwiel aan de as, dat weer verbonden is met een ander tandwiel. Deze wielen zijn voor het bijhouden van de dagen en de maanden. In het vlak daarboven is een ingebouwd zelflopend uurwerk, ik zal hier niet vertellen hoe dat allemaal ontworpen is. Waar het nu vooral omgaat is die horizontale as, met zijn 'planeet-tandwielen'.



Als je het planetarium achterstevoren draait, de deksel eraf haalt en in het planetarium kijkt, dan zie je het plaatje hieronder.
Er zijn zes ringen te zien, voor elke planeet één. De grootte van die ringen is net zo groot als de planeetbaan, van de bijbehorende planeet die op de voorkant te zien is.

Die ringen staan verticaal, en horizontaal erop vast gemaakt zitten aan de ene kant tanden, en aan de andere kant zit een speld met daarop een bolletje, inderdaad: de bijbehorende planeet die je op de voorkant door de gleuf ziet. Het planetarium is zo gemaakt dat als je het deksel dicht doet, de tanden van de ringen (die horizontaal staan), precies in de tandwielen die in de deksel zitten vallen.



Elke planeet heeft dus een eiden tandwiel en een eigen tandring. Eéntje die verticaal in de deksel zit, en een ring met horizontale tanden, die geplaatst is zodat ze op één plek de 'verticale tandwielen' raken.
Als er aan de horizontale ijzeren as gedraaid wordt, dan draaien de tandwielen die daaraan vast zitten natuurlijk mee. Is het deksel dicht, dan draaien de ringen ook. En automatisch draaien dan ook de planeten aan de voorkant!

Het aantal tanden aan de tandwielen en ringen is op zo gekozen, dat de omlooptijd van de planeten om de zon héél goed benaderd wordt. Hoe goed die benadering is en hoe dat gedaan is, zal ik in hoofdstuk 5 uitleggen. Daarvoor is het erg handig eerst iets over kettingbreuken te weten.

4 Kettingbreuken

Je kan je goed voorstellen, dat het erg lastig is om in een planetarium, tandwielen te maken, met 100000 tanden. Zeker als je het planetarium niet al te groot wil laten worden. Christiaan had dit probleem: om de planeten in het planetarium de zelfde omlooptijd te geven als in het echt, zou hij tandwielen nodig hebben met honderdduizend, soms wel miljoenen tanden. Hier heeft hij iets slims op bedacht.

4.1 Huygens' slimme idee

Een citaat uit het Planetarium-boek van Eise Eisinga:
'De geheele kwestie komt dus hierop neer: wanneer twee groote getallen gegeven zijn die in een bepaalde verhouding tot elkander staan, andere kleinere te vinden voor de radertanden die niet ongeschikt zijn door hun grootte en die dezelfde verhouding met een zoo groote nauwkeurigheid opleveren, dat geen andere kleinere getallen een betere benadering geven.'

Ofwel: heb je twee grote getallen met elkaar in verhouding staan, vind dan twee kleinere die die verhouding zo nauwkeurig mogelijk benaderen en zelfs zo, dat als je twee kleinere getallen neemt, de verhouding tussen die twee getallen geen beter benadering is[6].

Hoe Christiaan dat deed, leg ik uit aan de hand van een voorbeeld.
We kiezen twee getallen: 144 en 37 en zeggen dat die met elkaar in verhouding staan. Deze getallen zijn niet zo heel groot, maar anders wordt het zo'n gereken.
We gaan nu eigenlijk de hele tijd het grootste getal door het kleinste getal delen. Maar dan wel zodat we het de hele tijd over $\frac{144}{37}$ blijven hebben. Dat doen we zo:
Als eerst, delen we het grootste getal (144) door het kleinste getal (37).

$$\frac{144}{37} = 3 + \frac{33}{37}$$

De rest is 33, dus moeten we (37), wat nu het grootste getal is, door die rest delen. Dat doen we door $3 + \frac{33}{37}$ anders te schrijven, aangezien we het steeds over $\frac{144}{37}$ willen blijven hebben. We krijgen dan:

$$3 + \frac{33}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{33}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{33}}$$

6. anders kan je beter die twee kleinere getallen nemen

De vorige rest was 33 en de nieuwe is 4. We willen nu dus 33 door 4 delen, dat gaat op dezelfde manier als net:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{33}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{33}{4}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4}}}$$

De vorige rest was 4 en de nieuwe rest is 1. Hé, dan moesten we stoppen, dus zijn we klaar. We hebben nu:

$$\frac{144}{37}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4}}}$$

We hebben nu van onze verhouding, een ingewikkeld uitziende breuk gemaakt. Dat lijkt misschien niet erg handig, maar we zijn nog niet klaar. Met die breuk gaan we namelijk een rij getallen maken, die steeds dichterbij onze verhouding $\frac{144}{37}$ komt en op het laatst het zelfs is. Dat doen we door eerst de hele breuk weg te laten (dit is het eerste element van de rij), daarna door de 'tweede' breuk weg te laten (dit het tweede element), daarna de 'derde', ..., en als laatste zonder iets weg te laten.
Als voorbeeld maken we de rij bij $\frac{144}{37}$. We gaan eerst de hele breuk weglaten, dan hou je 3 over. Laat je alleen de tweede breuk weg (dat wil zeggen: $\frac{1}{8+\frac{1}{4}}$) dan heb je: $3+\frac{1}{1}=4$. Laat je de derde (en laatste) weg ($\frac{1}{4}$) dan heb je $3+\frac{1}{1+\frac{1}{8}}=\frac{35}{9}$. Nu voegen we de hele breuk toe zonder iets weg te laten (ofwel: $\frac{144}{37}$). Onze rij ziet er nu zo uit: $3, 4, \frac{35}{9}, \frac{144}{37}$.
Zoals gezegd geldt, hoe verder in de rij, hoe verder we de ingewikkeld uitziende breuk berekend hebben, dus hoe dichter bij $\frac{144}{37}$.

De twee kleinere getallen die we zochten, zijn nu te vinden in de rij die we gemaakt hebben. Nemen we als getal $\frac{35}{9}$, dan zijn 35 en 9 je twee kleinere getallen. Staat er in de rij een geheel getal, dan worden de twee kleinere getallen dat gehele getal en 1. Kies de breuk uit de rij die het geschikst is. Bedenk wel, hoe verder in de rij, hoe beter de benadering.

Hierboven wordt ergens beweerd dat geen kleinere andere getallen een betere benadering geven. Huygens bewijst dit aan de hand van een voorbeeld. In het Nederlands kan je dit nalezen op pagina 401 en 402 van het Planetarium Boek van Eise Eisinga. Ik zal verder op in het hoofdstuk een bewijs geven.

De 'moeilijk uitziende breuk' die we in het begin van dit hoofdstuk gemaakt hebben, heeft de toepasselijke naam *kettingbreuk* gekregen. Inmiddels is er al veel meer theorie over kettingbreuken, er is zelfs een minder ruimte innemende notatie bedacht. Hoe en wat is te lezen in de volgende paragraaf.

4.2 Kettingbreuken

Er zijn eindige en oneindige kettingbreuken. En over allebei zou ik boeken vol kunnen schrijven. Maar helaas laat ik het in deze scriptie bij de eindige kettingbreuken, en behandel alleen dat wat van nut kan zijn voor het analyseren van het planetarium.

Als je tegenwoordig in dictaten en boeken kijkt, waarin kettingbreuken behandeld worden, beginnen ze met het algoritme van Euclides. Dat is een handige manier om de kettingbreuk uit te leggen. Kijk maar:

$$\begin{aligned} 144 &= 3 \cdot 37 + 33 \\ 37 &= 1 \cdot 33 + 4 \\ 33 &= 8 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Met dit rijtje 'sommen' in je hoofd en door in de eerste regel alles door 37 te delen, in de tweede regel alles door 33, enzovoorts, kan je $\frac{144}{37}$ zo omschrijven:

$$\frac{144}{37} = 3 + \frac{33}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{33}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{33}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{33}{4}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4}}}$$

Het resultaat is precies hetzelfde als in de vorige paragraaf en noemen we een kettingbreuk. Een compactere schrijfwijze, voor de kettingbreuk van hierboven is: $[3; 1, 8, 4]$. Nu nog even de formele definitie:

DEFINITIE Een *eindige kettingbreuk* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ is een herhaalde breuk van de vorm

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_n}}}}$$

met $a_0, \ldots, a_n$ gehele getallen zodat $a_i \geq 1$ als $i \geq 1$.
Verder kunnen we laten gelden dat $a_n \geq 2$, want stel $a_n = 1$, dan kan je net zo goed a_{n-1} eentje ophogen en a_n weglaten.
De getallen $a_0, \ldots, a_n$ heten de *wijzergetallen* van de kettingbreuk.
De *waarde* van de kettingbreuk is de breuk die na het omrekenen van de kettingbreuk eruit komt en noteren we met $\frac{p}{q}$.
Herinner je nog uit de vorige paragraaf, dat we de kettingbreuk afkapten om zo een rij te maken, met getallen die steeds dichter bij de waarde van de kettingbreuk kwamen? Die getallen heten de *convergenten* van de kettingbreuk $[a_0, \ldots, a_n]$ en kunnen we nu noteren als:

$$[a_0], [a_0; a_1], [a_0; a_1, a_2], \ldots, [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

Omdat we zelfs $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ een te lange notatie vinden is er voor elke convergent het volgende bedacht: $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ (en dus $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$).
Laten we voor de duidelijkheid de convergenten van het voorbeeld hierboven uitrekenen ($[3; 1, 8, 4]$).

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = [3] = 3$$
$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = [3; 1] = 3 + \frac{1}{1} = 4$$
$$\frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1, a_2] = [3; 1, 8] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8}} = \frac{35}{9}$$
$$\frac{p_3}{q_3} = [a_0; a_1, a_2, a_3] = [3; 1, 8, 4] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{144}{37}$$

Dit zijn precies de waarden die we in de vorige paragraaf gevonden hadden!

Voor het volgende hoofdstuk is het erg handig om dit alles goed te snappen. Daar zal er namelijk met veel kettingbreuken gerekend worden. De volgende paragraaf draagt daar ook een steentje aan bij.

4.3 Stellingen over kettingbreuken

Voor de volgende stellingen is het nodig om nog twee convergenten te definëren.

$$p_{-2} = 0 \qquad p_{-1} = 1$$
$$q_{-2} = 1 \qquad q_{-1} = 0$$

We gaan kijken of je uit twee voorgaande convergenten, de volgende kunt vinden. Gegeven is de kettingbreuk $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ met waarde p/q. Dan is

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}\\
\frac{p_1}{q_1} &= [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}\\
\frac{p_2}{q_2} &= [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1a_2+1} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}
\end{aligned}$$

Om sneller $\frac{p_2}{q_2}$ uit te rekenen, moet je eigenlijk gewoon bij $\frac{p_1}{q_1}$ alle a_1's vervangen door $a_1 + \frac{1}{a_2}$. Laten we dat even controleren:

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0(a_1 + \frac{1}{a_2}) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1a_2 + 1}$$

Het klopt! Merk op dat dit voor elke twee opeenvolgende convergenten geldt: heb je

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_k}}}}$$

al uitgerekend, dan kan je $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ weer uitrekenen door alle a_k's te vervangen door $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$.
Verder is te zien dat p_2 en q_2 gemaakt kunnen worden uit p_1, p_0 resp. q_1, q_0 en a_2. Want:

$$\begin{aligned}
p_2 &= a_0a_1a_2 + a_0 + a_2 = a_2(a_1a_0 + 1) + a_0 = a_2p_1 + p_0\\
q_2 &= a_1a_2 + 1 = a_2q_1 + q_0
\end{aligned}$$

Nu hopen dat zoiets voor elke convergent geldt:

STELLING 1 Voor de convergenten $\frac{p_k}{q_k}$ van de kettingbreuk $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, met waarde p/q geldt, voor $0 \leq k \leq n$:

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_kp_{k-1} + p_{k-2}}{a_kq_{k-1} + q_{k-2}}$$

BEWIJS:
Met inductie:
voor $k = 0$, $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ en $\frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}} = \frac{a_0}{1} = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$, dus voor $k = 0$ klopt het.
Neem aan:

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

Te bewijzen:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

We weten dat je $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ uit $\frac{p_k}{q_k}$ kunt maken, door alle a_k-tjes te vervangen door $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ (kijk maar naar de kettingbreuk). Dus:

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} &= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2} + \frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2} + \frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}} \\ &= \frac{p_k + \frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{q_k + \frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}\end{aligned}$$

Aangezien een kettingbreuk maar n convergenten en 'a'-tjes heeft, hebben we nu bewezen, dat voor $0 \leq k \leq n$:

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

□

Het kan handig zijn als we wat kunnen zeggen over hoe snel de convergenten van een kettingbreuk groeien. De convergenten van een kettingbreuk groeien het langzaamst als $\forall i : a_i = 1$, ofwel er staan alleen maar enen in de kettingbreuk. Vullen we dit in bij stelling 1 dan zie je dat de p_i's en de q_i's volgens een hele bekende rij groeien:

$$p_k = p_{k-1} + p_{k-2} \qquad en \qquad q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$$

De rij van Fibonacci. En q_i is zelfs precies gelijk aan de rij van Fibonacci, want die heeft de zelfde beginwaarden. De *langzaamste groei* loopt dus volgens de uitdrukking:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Oftewel: de convergenten van een kettingbreuk groeien minstens exponentieel!

Er is een stelling, die voor de meeste grote n vrij precies aangeeft hoe snel de convergenten groeien. Deze luidt als volgt:
Voor bijna elke reële x geldt voor de convergenten van zijn kettingbreuk dat: voor $k \to \infty$ groeit q_k als $(e^{\frac{\pi^2}{12 \cdot \log(2)}})^k$.
Deze stelling is te vinden in het boek *Continued Fractions van Andrew M. Rockett en Peter Szüsz* op pagina 163.

Met stelling 1 kunnen we een nog een paar eigenschappen over de convergenten van een kettingbreuk bewijzen. Daarvoor geef ik eerst twee hulpstellingen en een nieuwe definitie.

DEFINITIE Voor $0 \leq i < n$ definieren we:

$$\begin{aligned} x_{n-0} &:= a_n \\ x_{n-i} &:= a_{n-i} + \frac{1}{x_{n-i+1}} \\ x_0 &:= a_0 + \frac{1}{x_1} \qquad\qquad (= \frac{p}{q}) \end{aligned}$$

HULPSTELLING 1 Voor alle $0 \leq k \leq n-1$ geldt:

$$\frac{p}{q} = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

BEWIJS
Met inductie:
$k = 0$:

$$\frac{p}{q} = \frac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{x_1 a_0 + 1}{x_1 \cdot 1 + 0} = a_0 + \frac{1}{x_1} = x_0 = \frac{p}{q}$$

En als

$$\frac{p}{q} = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

Dan ook:

$$\frac{p}{q} = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

want (m.b.v. Stelling 1)

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(a_k + \frac{1}{x_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{x_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2} + \frac{p_{k-1}}{x_{k+1}}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2} + \frac{q_{k-1}}{x_{k+1}}} = \frac{p_k + \frac{p_{k-1}}{x_{k+1}}}{q_k + \frac{q_{k-1}}{x_{k+1}}} \\ &= \frac{x_{k+1} p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} q_k + q_{k-1}}\end{aligned}$$

Omdat de x_i alleen voor $i = 0 \dots n$ gedefinieerd is, hebben we nu voor $0 \leq k \leq n-1$ bewezen dat

$$\frac{p}{q} = \frac{x_{k+1} p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

□

HULPSTELLING 2 Voor de convergenten $\frac{p_k}{q_k}$ van de kettingbreuk $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ geldt:

$$p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

voor $0 \leq k \leq n$.
BEWIJS:
Voor dit bewijs gebruiken we stelling 1.
Als $k = 0$ klopt het: $p_{-1} q_0 - p_0 q_{-1} = 1 \cdot 1 - a_0 \cdot 0 = 1 - 0 = (-1)^0$.

Neem aan:

$$p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Te bewijzen:

$$p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = (-1)^{k+1}$$

We gaan kijken naar:

$$\begin{aligned}\frac{p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k}{q_k q_{k+1}} &= \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\ &= \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1})} = \frac{(-1)(p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1})}{q_k q_{k+1}} \\ &= \frac{(-1) \cdot (-1)^k}{q_k q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}}\end{aligned}$$

En omdat de convergenten p_i en q_i alleen voor $i \leq n$ gedefinieerd zijn, hebben we nu bewezen dat voor $0 \leq k \leq n$:

$$p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

$\square$

Het heeft heel wat tijd en ruimte gekost, maar nu kunnen we eindelijk de volgende stelling bewijzen.

STELLING 3 Voor de convergenten $\frac{p_k}{q_k}$ van de kettingbreuk $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, met waarde p/q geldt:

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

voor $1 \leq k \leq n$

BEWIJS

Met hulp van Hulpstelling 1 en 2 krijg je de gelijkheid:

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| &= \left|\frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{x_{k+1}p_k q_k + p_{k-1}q_k}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})} - \frac{p_k x_{k+1} q_k + p_k q_{k-1}}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})}\right| \\ &= \left|\frac{p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})}\right| = \left|\frac{(-1)^k}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})}\right|\end{aligned}$$

Kijken we naar x_{k+1}, dan zien we dat we x_{k+1} kunnen insluiten door $a_{k+1} < x_{k+1} < a_{k+1} + 1$. En dan geldt dus ook: $x_{k+1}q_k + q_{k-1} > a_{k+1}q_k + q_{k-1} = q_{k+1}$ en $x_{k+1}q_k + q_{k-1} < a_{k+1}q_k + q_k + q_{k-1} = q_k + q_{k+1}$, dus:

$$\left|\frac{(-1)^k}{q_k(q_k + q_{k+1})}\right| < \left|\frac{(-1)^k}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})}\right| < \left|\frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}\right|$$

Omdat $\left|\frac{(-1)^k}{q_k(x_{k+1}q_k + q_{k-1})}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right|$ zie je:

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

$\square$

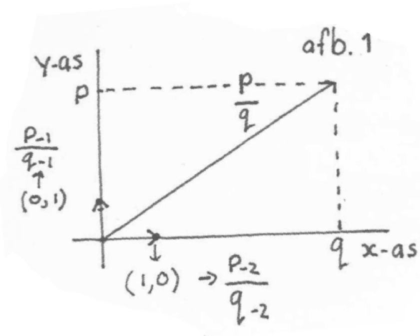
Nu komt de belangrijkste stelling, een eigenschap van de kettingbreuk die ik in de vorige paragraaf al genoemd hebt.

STELLING 4 Voor de convergenten $\frac{p_k}{q_k}$ van de kettingbreuk $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, met waarde p/q geldt dat

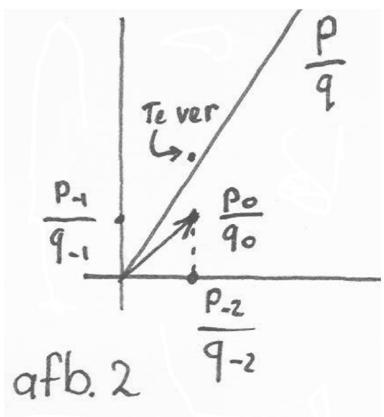
$$\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| \Rightarrow b > q_k$$

met a en b gehele getallen. Ofwel: de convergenten van een kettingbreuk zijn een *beste benadering*.

Om deze stelling te bewijzen, introduceer ik eerst een meetkundige interpretatie van de kettingbreuk en de stelling van Pick.



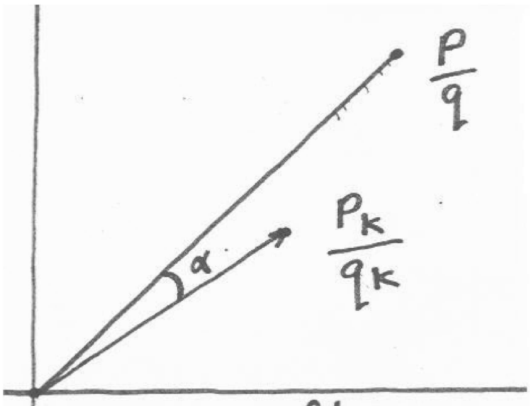
In afbeelding 1, is $\mathbb{R}^2$ getekend. Het lijnstuk[7] wat je daar ziet, stelt het getal $\frac{p}{q}$ voor dat we willen benaderen. Op deze manier kunnen we elk rationaal getal $\frac{a}{b}$ representeren, door een lijnstuk beginnend in $(0, 0)$ en eindigend in (b, a). Ook zie je er de -2^e en de -1^e convergenten als vectoren getekend, dit kan altijd aangezien die convergenten vast liggen. Om de 0^e convergent te bepalen, moet je de -2^e vector zo vaak bij de -1^e vector optellen, totdat je net niet voorbij lijnstuk $\frac{p}{q}$ gaat, zie afbeelding 2.



De x-coördinaat van deze nieuwe vector, is de convergent p_0, de y-coördinaat is q_0. Merkop dat als $\frac{p}{q}$ kleiner dan 1 is, je 0 keer de -1^e vector bij de -2^e vector kan optellen. Dan zijn de 0^e convergenten dus precies hetzelfde als de -2^e convergenten.
Om nu de 1^e convergent te bepalen, doe je precies hetzelfde, maar dan met de -1^e en 0^e convergent. Zo ga je door totdat je precies op het uiteinde van lijnstuk $\frac{p}{q}$ terechtkomt.
Alle convergenten liggen nu op gehele roosterpunten van $\mathbb{R}^2$, er worden immers alleen gehele veelvouden bij opgeteld. De afstand tussen een convergent en het lijnstuk $\frac{p}{q}$ is nu de grootte

7. Merk op: reële getallen kan je representeren door lijnen.

van de hoek α tussen die convergent-vector en het lijnstuk, zie afbeelding 3.



afb. 3

STELLING VAN PICK Als een simpel[8] roosterveelhoek r roosterpunten op de rand heeft en i in het inwendige, dan is de oppervlakte A gelijk aan:

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

BEWIJS
Deze stelling kan met inductie bewezen worden. Hier volgt een schets van het bewijs.
Het is slim om als eerst te laten zien, dat het Pickgetal ($i + \frac{r}{2} - 1$) de someigenschap heeft, dus dat de oppervlakte van twee veelhoeken samen gelijk is aan de som van hun Pickgetallen. Dit is een kwestie van uitschrijven. Verder is het zo dat elk veelhoek te verdelen is in driehoeken, dus als we bewijzen dat de stelling voor elk driehoek geldt, dan geldt dmv de someigenschap dat de stelling voor elk veelhoek geldt.
We moeten dus alleen nog laten zien dat de stelling voor elk driehoek geldt.
Het is makkelijk in te zien dat de stelling voor elk rechthoek geldt. Omdat een rechthoek te verdelen is in twee gelijke rechte driehoeken, die allebei hetzelfde Pickgetal hebben, geldt dat het Pickgetal van de rechthoek gelijk is aan $2\cdot$(Pickgetal van zo'n driehoek). Oftewel, de oppervlakte van het rechthoek is gelijk aan 2 keer het Pickgetal van zo'n driehoek. En omdat de oppervlakte van het rechthoek twee keer de oppervlakte van zo'n driehoek is, geldt dat voor rechte driehoeken de stelling van Pick geldt.
Kijken we nu naar een willekeurig driehoek, dan is die te reproduceren tot een

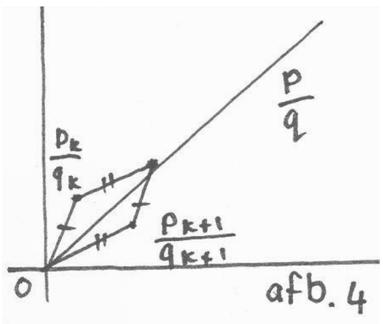
8. de zijden van de veelhoek snijden elkaar niet, of: alleen de punten van het vlak die bij twee zijden van de veelhoek horen, zijn roosterpunten van de veelhoek.

rechthoek door er rechte driehoeken en eventueel rechthoeken aan te plakken. Op dezelfde manier is in te zien dat dan voor elk driehoek de stelling van Pick geldt. En dus voor elke veelhoek.

□

Een volledige bewijs is onder andere te vinden in het boek *Introduction to Geometry* van *Coxeter*, op pagina 209.

Nu weten we genoeg om aan het bewijs van stelling 4 te beginnen.
BEWIJS VAN STELLING 4:
Wat we moeten bewijzen is dat als we een convergent $\frac{p_k}{q_k}$ hebben van een kettingbreuk met waarde $\frac{p}{q}$, er geen kleinere breuk bestaat die dichter bij $\frac{p}{q}$ ligt.
Vertaald naar de meetkundige interpretatie:
Links van de convergent mag geen roosterpunt (a, b) liggen zodat de afstand tussen lijnstuk $\frac{p}{q}$ en de convergent-vector groter is dan de afstand tussen lijnstuk $\frac{p}{q}$ en de (a, b)-vector.
Oftewel: als we van het parallellogram met als tegenoverstaande hoekpunten twee opeenvolgende convergenten $\frac{p_k}{q_k}$ en $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, $(0, 0)$ en de som van de twee convergent-vectoren (zie afbeelding 4) kunnen bewijzen dat daar geen roosterpunten in liggen dan zijn we klaar.



We gaan dat parallellogram nader bestuderen en wel met de convergenten $\frac{p_i}{q_i}$ en zijn voorloper $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$. We zien dat de hoekpunten van dat parallellogram de volgende coördinaten hebben: $(0, 0)$, (p_i, q_i), (p_{i-1}, q_{i-1}) en $(p_i + p_{i-1}, q_i + q_{i-1})$. Dat betekent dat de oppervlakte van dit parallellogram precies gelijk is aan $p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1}$. Met hulpstelling 2 zien we dus dat de oppervlakte voor elk van dit soort parallellogrammen gelijk is aan 1.
Deze gegevens gaan we 'in' de stelling van Pick voeren. We hebben een veelvlak met vierhoekpunten, alle gelegen op roosterpunten. De oppervlakte is 1. Dat wil zeggen, dat $A = 1$ en dat $r \geq 4$, in een gelijkheid: $r = 4 + n$ met $n \geq 0$. We hebben nu de gelijkheid:

$$1 = i + \frac{4+n}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = i + \frac{4+n}{2}$$

Je ziet aan het laatste gedeelte dat i en n alleen maar 0 kunnen zijn. Dat betekent dat het parallellogram geen inwendige roosterpunten heeft en zelfs dat

er geen roosterpunten op de zijden van het parallellogram liggen. Dit betekent weer dat er geen rooster punten zijn links van de convergenten, die dichter bij het lijnstuk $\frac{p}{q}$ liggen.
Vertalen we dit weer naar de stelling, dan betekent dit dat als je een a en een b hebt zodat $\frac{a}{b}$ dichter bij $\frac{p}{q}$ dan bij $\frac{p_k}{q_k}$, dan moet b wel groter dan q_k zijn en daarmee a ook, dus dan:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| \Rightarrow b > q_k$$

Automatisch geldt dan ook dat a groter dan p_k is.

$\square$

Genoeg over kettingbreuken nu. Het is tijd voor het vervolg van het planetarium.

5 De toepassing van kettingbreuken in het planetarium

Het zal geen verrassing meer zijn. Christiaan gebruikte de kettingbreuk voor het benaderen van de echte omloopstijd van de planeten. Even een korte opfrissing van hoofdstuk 3.
Aan de binnenkant van de deksel zat een lange horizontale ijzeren as. Dit is de aandrijfas en voor elke planeet zit er een tandwiel om heen. Verder had je nog voor elke planeet een ring, waar aan de ene kant de planeet aan zat vast gemaakt en aan de andere kant bedekt was met tanden, die in een cirkel haaks op de ring zaten, of wel een tandring. Deed je de deksel dicht, dan vallen de tanden van de ring precies in de tanden van de tandwielen aan de lange as. Gaat de as draaien, dan draaien de tandwielen die daaraan zitten, die dan de ringen in beweging zetten, en zo dus de planeten laten draaien.

5.1 Aan welke eisen moeten de tandwielen voldoen?

Christiaan heeft het planetarium zo ontworpen, dat als de aandrijf as één keer rond draait, de aarde één keer om de zon draait. Stel nou dat de Aarde in 10 dagen om de zon draait, en Mars in 25 dagen. Als de Aarde dan één rondje om de zon heeft gedraaid, dan moet Mars $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ rondjes om de zon draaien.
De tandwielen die de ring aandrijven zitten allen aan de zelfde lange as. Draait het tandwiel van de Aarde één keer rond, dan draait die van Mars dat ook en hetzelfde geldt voor alle andere planeten.
Geef nu het tandwiel van Mars dat aan de gezamenlijke as zit 10 tanden (zogenaamde omlooptijd Aarde) en de ring 25 tanden (zogenaamde omlooptijd Mars), dan draait Mars $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ keer rond als de aarde 1 keer ronddraait en dat is precies wat je wilt hebben. In theorie, kan je op deze manier met tandwielen elke breuk na maken. Dus:
Het aantal tanden van de tandring en het aantal tanden van het tandwiel hebben per planeet een verhouding van $omlooptijd\ planeet : omlooptijd\ Aarde$.

De tandwielen, zijn een belangrijk onderdeel van het planetarium. Zij zorgen er immers voor dat alles kan ronddraaien en hoe precies dat gebeurt. Van belang is dus dat deze zorgvuldig gemaakt worden. Waar moet dan op gelet worden?

- Ten eerste, moeten er niet te veel tanden aan een tandwiel zitten. Je snapt wel dat veel tanden (denk hierbij aan honderduizenden) aan een tandwiel erg lastig te maken is. Zeker in die tijd, toen ze daar nog geen ingenieuze machines voor hadden.
- Verder moeten de tandwielen ervoor zorgen dat de omlooptijden van de planeten in het planetarium zo veel mogelijk in de buurt van de echte omlooptijden liggen.

De getallen van de verhouding $omlooptijd\ planeet : omlooptijd\ aarde = aantal\ tanden\ tandring : aantal\ tanden\ tandwiel$ is erg groot. Die kan dus niet gebruikt worden. In de volgende paragraaf zie je hoe Christiaan nieuwe verhoudingen berekende die erg in de buurt van de oorspronkelijke verhoudingen liggen en ook nog praktisch realiseerbaar zijn.

5.2 De tandwielen in het planetarium

Christiaan gebruikte voor de berekening van het aantal tanden, twee verschillende soorten omlooptijden door elkaar. De omlooptijd ten opzichte van de Ecliptica en de omlooptijd ten opzichte van de sterren. We weten niet precies waarom, maar we denken dat het komt doordat het toen voor de buiten planeten makkelijker was om de omlooptijd te meten op de ene manier en voor de binnen planeten op de andere manier. Omdat hij de omlooptijd van de planeten met die van de Aarde 'vergelijkt', heeft hij voor de Aarde de ene keer de lengte van het tropische jaar[9] gebruikt en de andere keer de lengte van het siderische jaar[10].
Het tropische jaar duurt 365 dagen, 5 uur, 49 minuten, 15 seconden en 46 zestigste seconden.Het siderische jaar duurt 365 dagen, 6 uur, 9 minuten, 26 seconden en 435 zestigste seconden. Dit zijn uiteraard de tijden die in 1682 bekend waren.
Om niet steeds alles uit mijn hoofd te berekenen, heb ik in Magma een programma geschreven die de bijbehorende kettingbreuk geeft en een programma die de convergenten van een kettingbreuk berekent. Deze zijn te zien in de Bijlage.

AARDE
Christiaan wilde bij één omwenteling van de lange ijzeren as, de aarde één keer om de zon laten draaien. Oftewel; als het tandwiel dat om de ijzeren as zit, één keer ronddraait, dan moet de ring (met de Aarde eraan) ook één keer ronddraaien. Het tandwiel moet dus even veel tanden hebben als de 'tandring'. Het aantal tanden aan de tandring en het tandwiel is dus willekeurig te bepalen. Christiaan koos zestig tanden. Blijkbaar vond hij dit een praktisch aantal. Waarschijnlijk is dit ok de reden dat hij bij andere planeten de convergenten verdubbeld en soms zelf vervier dubbeld heeft.

SATURNUS
De omlooptijd van Saturnus ten opzichte van de sterren is 29 jaar[11], 174 da-

9. het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende doorgangen van de middelbare Zon door het Lentepunt
10. de tijd die de zon nodig heeft om de Ecliptica een keer te doorlopen
11. hier is een jaar 365 dagen lang

gen, 4 uur, 58 minuten, $25,5$ seconden. Dit ronde Christiaan af op 29 jaar, 174 dagen, 5 uur en schreef dit in $\frac{1}{6}$e deel van een uur. Dat is in dus in totaal: $29 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 6 + 174 \cdot 24 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 1549326 \times$tien minuten. De omlooptijd van de aarde rondde hij af op 365 dagen, 6 uur en 10 minuten. Uitschrijven in $\frac{1}{6}$e uren geeft: $365 \cdot 24 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 1 = 52597$.
De tanden van de tandring en het tandwiel van Saturnus moeten nu een verhouding hebben van: $1549326 : 52597$. Zoals je ziet erg groot, dus gaan we met behulp van de convergenten van de kettingbreuk deze verhouding benaderen. De kettingbreuk is $[29; 2, 5, 3, 1, 17, 1, 60]$, ofwel

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{60}}}}}}}$$

En de convergenten zijn:

$$\frac{29}{1}, \frac{59}{2}, \frac{324}{11}, \frac{1031}{35}, \frac{1355}{46}, \frac{24066}{817}, \frac{25421}{863}, \frac{1549326}{52597}.$$

Hij koos de convergent $\frac{59}{2}$, maar waarschijnlijk omdat je met twee tanden lastig dingen kan laten rond draaien, heeft hij de tandring 118 en het tandwiel 4 tanden gegeven.

JUPITER
De omlooptijd van Jupiter ten opzichte van de sterren is 11 jaar, 317 dagen, 14 uur, 49 minuten, 31 seconden en 56 zestigste seconden. Uitschrijven en afronden op $\frac{1}{6}$e deel van een uur geeft: $623897 \times$tien minuten. De omlooptijd van de aarde uitschrijven in en afronden op $\frac{1}{6}$e deel van een uur geeft: $52597 \times$tien minuten. Doen we het zelfde als bij Saturnus, dan krijgen we het volgende:

$$\frac{623897}{52597} = [11, 1, 6, 4, 4, 1, 6, 1, 1, 4, 5]$$

met als convergenten:

$$11, 12, \frac{83}{7}, \frac{344}{29}, \frac{1459}{123}, \frac{1803}{152}, \frac{12277}{1035}, \frac{14080}{1187}, \frac{26357}{2222}, \frac{119508}{10075}, \frac{623897}{52597}.$$

Christiaan koos $\frac{83}{7}$ en gaf het tandwiel van Jupiter 7 tanden en de tandring 83 tanden.

MARS
De omlooptijd van Mars ten opzichte van de sterren is 686 dagen, 23 uur, 31 minuten en 56 seconden. Uitschrijven en afronden op $\frac{1}{6}$e deel van een uur geeft: $98925\times$tien minuten. De omlooptijd van de aarde uitschrijven in en afronden op $\frac{1}{6}$e deel van een uur geeft: $52597\times$tien minuten. Doen we het zelfde als bij Saturnus, dan krijgen we het volgende:

$$\frac{98925}{52597} = [1, 1, 7, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 6, 1, 1, 4]$$

met als convergenten:

$$1, 2, \frac{15}{8}, \frac{32}{17}, \frac{47}{25}, \frac{79}{42}, \frac{284}{151}, \frac{647}{344}, \frac{1578}{839}, \frac{10115}{5378}, \frac{11693}{6217}, \frac{21808}{11595}, \frac{98925}{52597}$$

Christiaan koos $\frac{79}{42}$ en gaf de tandring 79 tanden en het tandwiel 42.

VENUS
De omlooptijd van Venus ten opzichte van de de Ecliptica is 224 dagen, 17 uur, 44 minuten en 55 seconden. Uitschrijven en afronden op $\frac{1}{12}$e deel van een uur geeft: $64725\times$vijf minuten. De omlooptijd van de aarde (dit keer gebruik je dus het tropenjaar) uitschrijven in en afronden op $\frac{1}{12}$e deel van een uur geeft: $105190\times$tien minuten. Doen we het zelfde als bij Saturnus, dan krijgen we het volgende:

$$\frac{64725}{105190} = [0, 1, 1, 1, 1, 2, 84, 1, 3, 1, 3]$$

met als convergenten:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{675}{1097}, \frac{683}{1110}, \frac{2724}{4427}, \frac{3407}{5537}, \frac{12945}{21038}$$

Christiaan koos $\frac{8}{13}$ en het vierdubbele aantal tanden aan de tandring en het tandwiel.

MERCURIUS
De omlooptijd van Mercurius ten opzichte van de de Ecliptica is 87 dagen, 23 uur, 14 minuten en 24 seconden. Uitschrijven en afronden op $\frac{1}{12}$e deel van een uur geeft: $25335\times$vijf minuten. De omlooptijd van de aarde uitschrijven in en afronden op $\frac{1}{12}$e deel van een uur geeft: $105190\times$tien minuten. Doen we het

zelfde als bij Saturnus, dan krijgen we het volgende:

$$\frac{25335}{105190} = \frac{5067}{21038} = [0, 4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 2]$$

met als convergenten:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{6}{25}, \frac{7}{29}, \frac{13}{54}, \frac{33}{137}, \frac{46}{191}, \frac{79}{328}, \frac{125}{519}, \frac{204}{847}, \frac{1553}{6448}, \frac{1757}{7295}, \frac{5067}{21038}$$

Christiaan koos $\frac{33}{137}$ en gaf dus de tandring van Mercurius 33 tanden en het tandwiel 137 tanden.

Voor de handigheid nog een overzichtje van het aantal tanden per planeet:

Planeet	aantal tanden tandring	aantal tanden tandwiel
Aarde	60	60
Saturnus	118	4
Jupiter	83	7
Mars	79	42
Venus	32	52
Mercurius	33	137

Er wordt de hele tijd gezegd dat het planetarium niet veel afwijkt van ons eigen zonnestelsel. Hoeveel dat nou precies is, kan je in de volgende paragraaf lezen.

5.3 Hoeveel wijkt het planetarium af?

In deze paragraaf laat ik zien hoeveel het planetarium na twintig jaar afwijkt. Dit kan op verschillende manieren, want we hebben per planeet de precieze omlooptijd en de afgeronde omlooptijd, die we allebei met het gekozen aantal tanden willen vergelijken.
Omdat het per planeet de hele tijd dezelfde berekening is, heb ik besloten om hier voor één planeet de berekening te laten zien. De afwijkingen van de andere planeten, zet ik zonder de berekening te laten zien in een tabel aan het einde van deze paragraaf.
Omdat ik erg van chocolade hou, heb ik voor de planeet Mars gekozen.

Mars heeft 79 tanden aan zijn tandring en 42 tanden aan zijn tandwiel. Dat betekent dat in 1 jaar Mars $\frac{42}{79}$ deel van zijn 'rondje' om de zon aflegt en dus dat in 79 jaar, Mars 42 keer rond gaat.
De echte omlooptijd van Mars is 686 dagen, 23 uur, 31 minuten en 56 seconden. In seconden omgerekend is dat 59355116 seconden. De omlooptijd van de

Aarde is 365 dagen, 6 uur, 9 minuten, 26 seconden (en $43,5$ zestigste seconden). Omgerekend in seconden is dat 31558166 seconden.
Dat betekent dat Mars in 79 jaar $\frac{31558166}{59355116} \times 79$ keer *hoort* rond te gaan. En dus loopt Mars in 79 jaar

$$\frac{31558166}{59355116} \times 79 - 42 = \frac{31558166 \times 79 - 42 \times 59355116}{59355116} = \frac{90121}{29677558}$$

deel van één rondje achter. Per 20 jaar is dat:

$$\frac{90121}{29677558} \times \frac{20}{79} = \frac{901210}{1172263541}$$

Deze breuk gaan we omrekenen in boogminuten (één zestigste deel van een graad). $\frac{901210}{1172263541}$ deel van een rondje, betekent $\frac{901210}{1172263541}$ deel van $360°$, dus na 20 jaar loopt Mars

$$\frac{901210}{1172263541} \times 360° = \frac{324435600}{1172263541}^{\circ} = \left(\frac{324435600}{1172263541} \times 60\right)' = \frac{19466136000'}{1172263541} \approx 16,606'$$

boogminuten achter.

Nu gaan we de afwijking berekenen van Mars ten opzichte van de kettingbreuk. Dit is precies de zelfde berekening, alleen komt nu op de plek waar eerst $\frac{31558166}{59355116}$ stond, $\frac{52597}{98925}$ te staan, de breuk waarvan we de convergenten genomen hebben.
Nu loopt Mars in 79 jaar:

$$\frac{52597 \times 79 - 42 \times 98925}{98925} = \frac{313}{98925}$$

deel van één rondje achter. Dat is per 20 jaar:

$$\frac{313}{98925} \times \frac{20}{79} \times 360° = \frac{30048}{104201}^{\circ} = \frac{30048}{104201} \times 60' = \frac{1802880'}{104201} \approx 17,302'$$

Als je dit ook voor alle andere planeten doet, dan krijg je de volgende tabel:

Planeet	afwijking tov echte breuk	afwijking tov kettingbreuk
Aarde	–	–
Saturnus	$21,587'$	$21,602'$
Jupiter	$-14,452'$	$-14,416'$
Mars	$16,606'$	$17.302'$
Venus	$78,438'$	$79,258'$
Mercurius	$193,705'$	$193,767'$

Met Stelling 3 hadden we een insluiting gemaakt tussen de kettingbreuk waarde en zijn convergenten. En kunnen we dus iets over de afwijking van het planetarium zeggen. Want stel, we willen dat het verschil tussen de kettingbreuk waarde en de gekozen convergent minder dan $0,001\%$ is. Welke convergent moeten we dan nemen? Dit kan je met behulp van stelling 3 berekenen.
Mercurius is de planeet die het meest een verbetering nodig heeft. De percentuele afwijking van Mercurius is: $\frac{194'}{20\times360\times60'} \approx 0,045\%$. Maar we willen dat die afwijking minstens $0,0001\%$ is. Met stelling 3 gaan we bekijken welke convergenten we moeten nemen.
Eerst moeten we $0,0001\%$ van de breuk uitrekenen:

$$\frac{5067}{21038} \times 0,0001\% = \frac{5067}{21038000000} \approx 2,4 \times 10^{-7}$$

En nu hoeven we alleen nog maar simpelweg te proberen welke van de convergenten hier aan voldoet (zie vorige paragraaf voor de convergenten). Na wat proberen zie je dat $\frac{204}{847}$ hier als eerste aan voldoet, want

$$\frac{1}{519 \times 847} \approx 2,27 \times 10^{-6} \qquad \frac{1}{847 \times 6448} \approx 1,83 \times^{-7}$$

Nu weet je met stelling 3 dat als we de convergent $\frac{204}{847}$ gekozen hadden, en dus de tandring 204 en het tandwiel 847 tanden gegeven hadden, de afwijking minder is dan $0,0001\%$. Maar ja, wie heeft er nou zin om 847 tanden uit te zagen?

Zoals je in de tabel hierboven kunt zien, is de afwijking van Mercurius erg groot. Een echte wetenschapper laat het hier natuurlijk niet bij zitten en gaat onderzoek doen. Zo ook Christiaan. Hij onderzocht de zojuist besproken convergent en zorgde ervoor dat de afwijking van Mercurius minder dan $0,0001\%$ werd. Hij keek ook nog eens naar Saturnus, en nam in plaats van de omlooptijd, een andere betere waarde. Hier lees je meer over in het volgende hoofdstuk.

5.4 Een verbetering

Toen Christiaan Huygens een aantal jaar later zijn ontwerp bekeek, heeft hij verbeteringen aangebracht. Het planetarium was toen nog niet gebouwd, dus deze verbeteringen zijn ook echt in het planetarium gebruikt. Hij heeft verbeteringen bedacht bij de planeten Saturnus en Mercurius.

SATURNUS
Voor de verhouding van de tanden van Saturnus heeft hij twee andere waarden genomen, namelijk het aantal graden wat Saturnus per jaar opschuift en heeft die vergeleken met de opschuiving van de Aarde.
De opschuiving van Saturnus is $12°13'34''118'''$, die van de Aarde $359°45'40''31'''$. Omgerekend naar zestigste boogseconden komen we op de verhouding: $2640858 : 77708431$. Met als kettingbreuk: $[29; 2, 2, 1, 5, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 10, 2, 2, 1]$. Neem je de 4^e convergent ($\frac{206}{7}$), dan heb je een veel kleinere afwijking, namelijk:

$$\left(\frac{2640858 \times 206 - 7 \times 77708431}{77708431}\right) \times \frac{20}{206} \times 360 \times 60 \approx 1,56'$$

Een hele verbetering!

MERCURIUS
Voor Mercurius heeft Christiaan naar de 6^e convergent gekeken, $\frac{204}{847}$. Hij zag dat deze heel mooi te factorizeren was in bruikbare getallen:

$$\frac{204}{847} = \frac{17 \times 12}{121 \times 7}$$

Met een beetje technisch inzicht en een beetje logisch nadenken kan je zien dat deze convergent met gebruik van twee assen en dus 4 'tandwielen' kan worden ge representeerd.
Geef het tandwiel aan de gemeenschappelijk as 121 tanden. Als je een asje maakt met aan de ene kant een tandwiel dat in het gemeenschappelijke tandwiel valt en aan de andere kant eentje die in de tandring valt. Geef de tandring 17 tanden, het tandwiel wat daarin valt 7 en het tandwiel van het extra asje dat in het gemeenschappelijke tandwiel valt 12.
Draait nu de Aarde 1 keer rond, dan draait het gemeenschappelijke tandwiel ook één keer rond, draait het eerste extra tandwieletje $\frac{121}{12}$ keer rond. En dus het tandwieletje met 7 tanden ook, want ze zitten aan de zelfde as. Dat betekent dus dat er in totaal $\frac{121}{12} \times 7$ tanden in de tandring vallen en dus dat Mercurius in 1 jaar:

$$\frac{\frac{121}{12} \times 7}{17} = \frac{17 \times 12}{121 \times 7}$$

rondje aflegt. En zo zie je dat je met deze constructie breuken als $\frac{a \times b}{c \times d}$ kunt representeren met tandwielen.
De nieuwe afwijking van Mercurius wordt nu:

$$\left(\frac{21038 \times 204 - 847 \times 5067}{5067}\right) \times \frac{20}{204} \times 360 \times 60 \approx 1,25'$$

Ook alweer stukken preciezer!
Met deze verbeteringen erbij komen we op de volgende afwijkingstabel:

Planeet	afwijking
Aarde	$-$
Saturnus	$1,56'$
Jupiter	$-14,452'$
Mars	$16,606'$
Venus	$78,438'$
Mercurius	$1,25'$

Zoals je ziet liggen de omlooptijden van Saturnus en Mercurius in het planetarium nu erg dicht bij de ware omloopstijd. De omlooptijd van de andere planeten, en vooral die van Venus kunnen nog wel wat preciezer gemaakt worden. Misschien wel op dezelfde manier als bij Mercurius gedaan is?
Het antwoord hierop, blijf ik schuldig, want voorlopig wou ik het hier bij laten.

6 Bibliografie

Voor deze Bachelor Scriptie is de volgende literatuur gebruikt:

- Christiaan Huygens, Projet de $1680 - 1681$, in: Oeuvres Complètes, Martinus Nijhoff, 's Gravenhage, 1944, vol. 21 Cosmologie, pp. $109 - 163$.
- Chiristiaan Huygens, Le Planétaire de 1682, in: Oeuvres Complètes, Martinus Nijhoff, 's Gravenhage, 1944, vol. 21 Cosmologie, pp. $165 - 184$.
- Christiaan Huygens, Beschrijving van het planetarium, vertaling van Automaton Planetarii uit de Opuscula Postuma van 1703, door J.A. Vollgraff en D.A.H. van Eck. in: E. Havinga, W.E. van Wijk, J.F.M.G. d'Aumerie, Planetarium-boek Eise Eisinga, Arnhem: van Loghum Slaterus, 1928, pp $382 - 410$.
- Andrew M Rockett en Peter Szüsz, 1992, *Continued Fractions*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- Coxeter, H.S.M., 1961, Introduction to geometry, New York Wiley

7 Bijlage

De gebruikte functies in Magma:

De volgende functie geeft de kettingbreuk weer van het getal x (x mag niet geheel zijn).

```
kettingbreuk := function(x)
ketting_breuk := [];
Append( ketting_breuk,Floor(x));
y := x;
while y gt 0 do
     z := 1/(y - Floor(y));
     Floor(z);
     Append( ketting_breuk, Floor(z));
     y := z - Floor(z);
end while;
return ketting_breuk;
end function;
```

De volgende function geeft bij een gegeven kettingbreuk, zijn rij van convergenten.

```
convergentenrij := function(kettingbreuk)
convergenten_rij := [];
Append( convergenten_rij,kettingbreuk[1]);
for i := 2 to #(kettingbreuk) do
     e := 0;
     b := 0;
     for j := 1 to i do
          b := kettingbreuk[ (i+1-j)] + e;
          e := 1/b;
     end for;
     convergenten_rij:= convergenten_rij cat [b];
end for;
return convergenten_rij;
end function;
```

Hier volgen een paar foto's die ik gemaakt heb toen ik het planetarium in museum Boerhaave gemaakt heb. Ze zijn niet erg mooi aangezien er allemaal glas om heen zat en de belichting onhandig was. De mooiste foto's wou ik jullie niet onthouden.

Hiernaast zie je een tandwiel uit het planetarium, een voorbeeld van een van de vele mooie afwerkingen van het planetarium. Hieronder is de lange as te zien met bijbehorende tandwielen. De foto is misschien een beetje onduidelijk, maar als je goed kijkt, zie je de as.