M Rene Taton

L'œuvre de Pascal en géométrie projective

In: Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1962, Tome 15 n°3-4. pp. 197-252.

L'œuvre de Pascal en géométrie projective

Bien que la géométrie ait joué un rôle important dans les préoccupations de Pascal et dans ses recherches, les textes géométriques qui figurent dans ses *Œuvres complètes* (1) sont peu nombreux — quatre au total — et n'occupent qu'une place très réduite (2).

Deux des fragments cités (3) se rapportent aux principes et à

(1) Les trois éditions auxquelles nous nous référons sont : les *Œuvres de Blaise Pascal* (par Ch. BOSSUT), 5 vol., La Haye, 1779; les *Œuvres de Blaise Pascal publiées selon l'ordre chronologique*..., par L. BRUNSCHVICG, P. BOUTROUX et F. GAZIER, 14 vol., Paris, 1908-1914 (« Collection des Grands Écrivains de la France ») ; les *Œuvres complètes de Blaise Pascal*, par J. CHEVALIER, Paris, 1954 (« Bibliothèque de la Pléiade »).

Mentionnons à cette occasion les diverses abréviations que nous utiliserons dans les notes suivantes, afin de simplifier les références bibliographiques :

Les trois éditions des *Œuvres de Pascal* précédemment citées seront respectivement désignées par : *Bossut*, G.E., PL. Ces abréviations seront suivies du numéro du tome et de l'indication des pages. Les abréviations suivantes seront également utilisées :

A.T. : *Œuvres de Descartes*, par Ch. ADAM et P. TANNERY, 13 vol., Paris, 1897-1913.

Corr. Descartes : Descartes. Correspondance publiée avec une introduction et des notes, par Ch. ADAM et G. MILHAUD, 7 vol. parus, Paris, 1936-1960.

Pappus : PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La collection mathématique*, trad. fr. P. VER EECKE, 2 vol., Paris-Bruges, 1933.

Fermat : Œuvres de Fermat, par P. TANNERY, Ch. HENRY et C. DE WAARD, 5 vol., Paris, 1891-1922.

Mersenne : Correspondance du P. Marin Mersenne, par C. DE WAARD, 7 vol. parus, Paris, 1932-1962.

Poudra : Œuvres de Desargues réunies et analysées, par M. POUDRA, ..., 2 vol., Paris, 1864.

Desargues : R. TATON, *L'œuvre mathématique de Desargues*..., Paris, 1951.

Huygens, *Œuvres de Christiaan Huygens*..., 22 vol., La Haye, 1888-1950.

Desargues und Pascal : C. I. GERHARDT, Desargues und Pascal über die Kegelschnitte (*Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Jahrgang, 1892, t. I, pp. 183-204).

Briefwechsel : C. I. GERHARDT, *Leibniz. Briefwechsel mit Mathematikern*, t. I, Berlin, 1899.

Aperçu : CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*..., 2e éd., Paris, 1875.

(2) 39 pages sur un total de plus de 1 200 pages (*in* PL).

(3) Il s'agit en particulier du texte célèbre *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* (PL, pp. 575-602) et de l'*Extrait d'un fragment de l'Introduction à la Géométrie de M. Pascal* (PL, pp. 602-604 ; cf. également ci-dessous, pp. 269-286).

la méthodologie de la géométrie et semblent être les vestiges d'un manuel élémentaire dont Pascal avait commencé l'élaboration, mais dont le projet fut ensuite abandonné (1). Les deux autres, auxquels nous nous intéresserons tout particulièrement, sont les seuls témoins de la grande œuvre réalisée par Pascal dans le domaine de la géométrie projective, œuvre dont la presque totalité semble définitivement perdue. Il s'agit tout d'abord de l'*Essay pour les coniques*, texte très bref que Pascal publia en 1640, à l'âge de 16 ans; longtemps oublié, cet essai fut réédité par Bossut en 1779 (2). L'autre texte, intitulé « Generatio conisectionum », est le premier chapitre — le seul qui nous soit parvenu — du grand *Traité des sections coniques* dont Pascal avait pratiquement terminé la rédaction et dont Leibniz put consulter le manuscrit en 1676. Ce n'est qu'en 1891 que C. I. Gerhardt retrouva une copie de ce fragment dans les manuscrits de Leibniz (3) ; la clarté et l'originalité de ce texte très court font regretter encore plus la perte des autres chapitres de ce *Traité des coniques* qui constituait sans nul doute l'une des œuvres les plus originales du XVII^e^ siècle dans le domaine de la géométrie.

Dans cette étude, nous n'aborderons pas l'analyse des deux fragments relatifs à la méthode et aux principes de la géométrie classique (4) ; par contre, portant essentiellement notre attention sur les deux textes de géométrie projective, nous essayerons de caractériser l'originalité de l'œuvre de Pascal en ce domaine. Utilisant les rares documents, de valeur très inégale, qui s'y rapportent, nous tenterons de restituer les grandes lignes du *Traité des coniques* et, chemin faisant, nous nous efforcerons de réunir quelques précisions sur divers autres travaux géométriques de Pascal dont l'existence nous est révélée par les différents documents utilisés.

(1) Il semble que PASCAL ait entrepris de rédiger un essai sur les *Éléments de Géométrie* pour les Petites Écoles de Port-Royal. Ce projet fut ensuite abandonné et l'ouvrage fut écrit par A. ARNAULD (*Nouveaux Éléments de Géométrie*, Paris, 1667). Peut-être le manuscrit rédigé par Pascal à ce sujet existait-il encore en 1675 et fut-il alors examiné par Leibniz (Lettre de Leibniz à Oldenburg, 12 juin 1675, *Briefwechsel*, p. 126).

(2) *Bossut*, IV, pp. 1-7.

(3) *Desargues und Pascal*, pp. 197-202.

(4) Le second texte cité (p. 197, n. 3), également retrouvé par GERHARDT (*Desargues und Pascal*, pp. 202-204) est l'objet d'une importante étude de J. ITARD dans ce même fascicule (ci-dessous, pp. 269-286).

I. — Les débuts scientifiques de Pascal

L'histoire des premiers contacts de Pascal avec les mathématiques a souvent été retracée avec plus de lyrisme ou de passion que d'objectivité (1). Les indications que Gilberte Pascal, la future Mme Périer, nous a laissées sur la précocité manifestée par son frère dans l'étude de la géométrie ont la plupart du temps été interprétées d'une façon assez inexacte. Il ressort en fait de ce témoignage (2) que c'est à l'âge de 12 ans, donc vers 1635, que Blaise Pascal commença son initiation mathématique en s'attaquant avec enthousiasme à l'étude des *Éléments* d'Euclide. Sa vocation pour la géométrie se manifesta alors avec beaucoup d'éclat et son père, Étienne Pascal, fut émerveillé lorsqu'il le surprit tentant de démontrer la 32e proposition d'Euclide (3).

Étienne Pascal, fixé à Paris depuis la fin de 1631, était alors en relations avec les principaux mathématiciens de la capitale, Mersenne, Roberval, Desargues, Mydorge, Le Pailleur, etc., et fréquentait régulièrement les réunions scientifiques organisées par le P. Mersenne. Au cours des années suivantes, il prit une part active à diverses discussions qui intervinrent entre les savants parisiens et certains correspondants de Mersenne, Fermat et Descartes en particulier (4). On conçoit donc qu'il se soit intéressé à l'éducation scientifique d'un fils qui apparaissait si remarquablement doué. Gilberte Périer assure qu'Étienne Pascal emmena bientôt le jeune Blaise aux réunions du P. Mersenne :

> Mon frère tenait fort bien son rang, tant pour l'examen que pour la production ; car il était un de ceux qui y portaient le plus souvent des choses nouvelles..., on prenait son avis sur tout et avec autant de soin que de pas un autre ; car il avait des lumières si vives, qu'il est arrivé qu'il découvrait des fautes dont les autres ne s'étaient point aperçus (5).

Aucun autre témoignage ne confirme que Blaise Pascal ait effectivement joué un rôle aussi important dans les réunions de Mersenne avant 1639. D'ailleurs les 7 volumes parus de la *Correspondance du P. Marin Mersenne* (jusqu'à la fin juillet 1638) (6),

(1) Cf. par exemple le célèbre passage de Chateaubriand.
(2) Cf. J. Mesnard, *Pascal*, 3e éd., Paris, 1951, p. 19.
(3) Il s'agit du théorème qui, par l'intermédiaire d'un angle extérieur, établit que la somme des angles d'un triangle est égale à 2 droits.
(4) Voir à ce sujet *Mersenne*, t. IV à VII (consulter les index).
(5) PL, p. 6.
(6) Les seules mentions faites de B. Pascal se rapportent à des faits postérieurs à 1639.

pourtant si remarquablement documentés, ne mentionnent aucune intervention du jeune Pascal dans une quelconque discussion (1). A cette date, Blaise se trouve avec son père en Auvergne d'où il ne rentrera qu'au début de 1639 (2).

Nous pensons donc que c'est aux premiers mois de 1639 qu'il faut situer les premières interventions véritables de Blaise Pascal dans l'activité du cercle scientifique parisien qui se réunissait autour du P. Mersenne. Le géomètre architecte Girard Desargues mettait alors la dernière main à son célèbre essai de géométrie projective des coniques, le *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* qu'il publia à 50 exemplaires en mars 1639 (3). Bien qu'ils aient apprécié depuis longtemps la pensée très originale de Desargues, il semble que la plupart des membres de l'« Académie du P. Mersenne » n'aient pas saisi toute l'importance des idées nouvelles exprimées dans le *Brouillon project*, œuvre capitale qui jetait les bases de la géométrie projective et d'une théorie unitaire des coniques. Probablement le style très particulier de l'auteur, son vocabulaire assez déroutant, son refus d'utiliser les notations algébriques et son inspiration à contre-courant des tendances analytiques de la plupart des recherches de l'époque sont-elles les raisons essentielles qui expliquent le manque d'intérêt manifesté par la plupart des mathématiciens à l'égard de cet ouvrage (4). Par contre, le jeune Blaise Pascal semble avoir compris immédiatement toute la richesse de l'apport arguésien et, dès les premiers mois de 1639, il se révèle comme le premier et le seul disciple véritable de Girard Desargues dans le domaine de la géométrie.

Saisissant toute l'importance de la conception projective des coniques, il adopte d'emblée les idées de base du *Brouillon project* : introduction des éléments à l'infini, définition des coniques comme sections planes quelconques de cônes à base circulaire, étude de ces courbes comme perspectives du cercle, relation d'involution déterminée sur une droite quelconque par une conique et les côtés

(1) Nous remercions M. B. Rochot qui nous a permis de consulter le manuscrit du t. VIII de Mersenne (août 1638-fin 1639) et de constater que la remarque précédente s'étendait à cette période, exception faite d'une information adressée par Mersenne à Descartes, dans une lettre perdue du 12 nov. 1639, sur l'*Essay pour les coniques*, dont le manuscrit semble à cette date pratiquement terminé.

(2) J. MESNARD, *Pascal*, p. 24.

(3) Cf. *Desargues*, pp. 28-29.

(4) *Desargues*, pp. 29-32, 97-98.

opposés d'un quadrilatère inscrit (1). Et bientôt, il aborde son œuvre originale en ce domaine. Dès avant la fin du mois de juin 1639 (2), il fait sa première grande découverte, celle d'une propriété équivalant au célèbre théorème, dit de Pascal, sur l'alignement des points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique. Et, peu après, il entrevoit la possibilité de fonder sur cette propriété une étude projective d'ensemble des coniques. Au cours des derniers mois de 1639, il rédige alors un *Essay pour les coniques*, simple programme de travail, illustré des énoncés de quelques-unes des propriétés nouvelles qu'il a déjà mises en lumière (3). Cet *Essay* sera publié sous forme d'une simple affiche tirée à très petit nombre d'exemplaires, au début de 1640 (4) au moment où, semble-t-il, Blaise Pascal se trouve déjà à Rouen auprès de son père, récemment nommé commissaire pour l'impôt et la levée des tailles en Basse-Normandie. Peut-être cette circonstance explique-t-elle le nombre considérable des coquilles qui se trouvent accumulées dans un texte si court (5). Avant d'aborder la suite des travaux géométriques de Pascal, nous analyserons ce texte fondamental et nous tenterons de reconstituer les circonstances de sa genèse.

II. — L' « Essay pour les coniques »

Depuis sa redécouverte par Bossut en 1779, l'*Essay pour les coniques* a été l'objet de nombreuses éditions (6), mais la plupart de celles-ci sont établies avec un soin insuffisant. C'est ainsi qu'elles reproduisent une partie des coquilles qui dénaturent l'édition originale ; certaines de celles-ci n'ont été corrigées pour la première fois qu'en 1955 (7). Renvoyant à cette édition pour une étude cri-

(1) *Ibid.*, pp. 94-98.

(2) Dans son *Adresse à l'Académie Parisienne*, Pascal parle (PL, p. 1403) de « L'œuvre complète des coniques..., par une seule proposition ou presque ; invention que j'ai faite quand je n'avais pas encore atteint l'âge de seize ans, et que plus tard j'ai mise en ordre ». C'est le 19 juin 1639 que Pascal eut 16 ans.

(3) Dès le 12 nov. 1639, Mersenne avait annoncé à Descartes l'envoi prochain de cet *Essay* et Descartes, dans sa réponse du 25 déc. 1639 (*Corr. Descartes*, III, p. 300) se montrait assez sceptique sur l'intérêt de l'écrit annoncé.

(4) Le 18 mars 1640, Constantin Huygens annonce à Descartes avoir reçu pour lui un exemplaire de cet *Essay* (*Corr. Descartes*, IV, p. 34).

(5) Voir à ce sujet notre étude « L'Essay pour les coniques de Pascal » (*Rev. Hist. Sci.*, VIII, 1955, pp. 1-18, et spécialement pp. 9-10).

(6) *Bossut*, IV, pp. 1-7 ; G.E., I, pp. 252-260 ; PL, pp. 57-63.

(7) R. Taton, « L'Essay pour les coniques de Pascal » (*Rev. Hist. Sci.*, VIII, 1955, pp. 1-18, spécialement pp. 11-18).

tique du texte original de l'*Essay*, nous en donnerons ici une analyse détaillée, afin de tenter de mieux situer les sources diverses de l'inspiration pascalienne.

L'*Essay* commence par une série de trois définitions d'intérêt très inégal. Pascal introduit d'abord la notion de faisceau de droites (lignes de même ordre ou de même ordonnance ; ordre de lignes ou ordonnance de lignes). Sa définition, directement inspirée de Desargues (1), associe le cas des droites concourantes à celui des droites parallèles et conduit ainsi, mais sans que ce fait soit explicité, à la notion de point à l'infini, plus clairement précisée par Desargues (2).

La seconde définition qui porte sur la notion de « section (plane) de cône » énumère les trois cas généraux (ellipse, hyperbole et parabole) et deux cas particuliers (cercle, système de deux droites concourantes) (3). Une troisième définition se borne à annoncer l'emploi du mot « droite », au lieu de « ligne droite » (4).

Puis vient une série de trois lemmes. Le premier de ceux-ci formule, dans le cas particulier du cercle, la propriété d'alignement des trois points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone inscrit. Mais l'énoncé pascalien se présente sous une forme assez différente qui ne fait aucune allusion à un quelconque hexagone inscrit. Il serait plus exact de transposer ce lemme sous la forme moderne suivante :

Soient 4 droites du plan, D_1, D_2, D_3, D_4, dont trois quelconques ne soient pas concourantes. Elles déterminent un quadrilatère complet dont nous désignerons par M_{ij} le sommet déterminé par l'intersection des droites D_i et D_j. Soit également le faisceau de cercles ayant pour points de base M_{13} et M_{24}. L'énoncé pascalien affirme que les droites définies par les secondes intersections d'un cercle variable du faisceau avec D_1 et D_4 et avec D_2 et D_3 se coupent sur la droite M_{12} M_{34} (5).

(1) « Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien paralleles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit que toutes ces droictes sont d'une mesme *ordonnance* entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de positions, elles tendent comme toutes à un mesme endroict » (*Desargues*, p. 100).

(2) Parlant des éléments d'un faisceau de droites parallèles, Desargues dit « que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part et d'autre » (*Desargues*, p. 100).

(3) Dans la *Generatio conisectionum*, l'énumération des cas particuliers est plus complète et mentionne le point (sommet du cône) et la droite double (plan tangent au cône) (PL, p. 1383).

(4) Desargues emploie indifféremment les deux dénominations.

(5) Voir également à ce sujet l'article de P. Costabel, pp. 256-257.

Bien qu'il soit facile de vérifier que cette propriété équivaut au théorème dit de Pascal considéré dans le cas du cercle, ces différences de forme sont telles qu'une assimilation peut paraître mal justifiée. En réalité, celle-ci, qui a été admise sans aucune réserve par presque tous les historiens (1), repose sur le seul fait que, dans son *Traité des coniques*, Pascal fait jouer un rôle essentiel à une certaine figure qu'il dénomme « hexagramme mystique », figure qui, sans nul doute, est en relation étroite, avec le cas général de l'hexagone inscrit dans une conique. Mais il faut remarquer que les quelques vagues indications que Leibniz nous a laissées sur l'hexagramme mystique de Pascal semblent montrer que sa théorie débordait largement le seul énoncé du « théorème de Pascal » (2). Cependant rien ne permet de dater avec précision (3) l'intervention de la formulation hexagonale dans la pensée pascalienne et d'affirmer en particulier qu'une telle formulation est sous-jacente au texte de l'*Essay*. Aussi les expressions de « théorème de l'hexagone inscrit » ou de « théorème de Pascal » que nous continuerons à employer par raison de commodité, doivent-elles être considérées comme de simples formules n'impliquant aucun jugement définitif à ce sujet.

Le second lemme affirme le fait évident que l'axe d'un faisceau de plans appartient au faisceau spatial de droites déterminé par les intersections des plans du faisceau avec un autre plan.

Pascal dit ensuite qu'à l'aide de ces lemmes et de quelques-unes de leurs conséquences immédiates, il démontrera un troisième lemme qui est en fait l'extension du « théorème de l'hexagone » au cas d'une conique quelconque.

Puis, à partir de ces trois lemmes et de quelques-unes de leurs conséquences, il élaborera des *Éléments coniques complets*, comprenant « les propriétés des diamètres et côtés droits » (4), les pro-

(1) En particulier M. CHASLES (*Aperçu*, p. 72) ; J. L. COOLIDGE (*The mathematics of great amateurs*, Oxford, 1949, p. 90), etc. Par contre, P. BOUTROUX (G. E., I, p. 253, n. 1) pose assez clairement le problème.

(2) Leibniz précise en effet que PASCAL consacrait un traité spécial, *De hexagrammo mystico et conico*, aux définitions, corollaires et propositions relatifs à cette figure (Lettre à Périer du 30 août 1676, ci-dessous, p. 213).

(3) Aucun texte antérieur à la lettre à Périer et aux notes de Leibniz ne semble en effet mentionner l'expression d' « hexagramme mystique ». Toujours est-il qu'elle figurait dans le *Traité* de PASCAL et que cette figure y tenait une place essentielle.

(4) A la suite d'Apollonius, les géomètres du XVII^e siècle associaient à tout diamètre d'une conique à centre un segment appelé côté droit (*latus rectum*) et égal à $2\,b'^2/a'$ (a' étant le demi-diamètre et b' le demi-diamètre conjugué).

priétés des tangentes, la détermination des sommets des cônes passant par une conique définie par certaines données, la construction par points de coniques soumises à certaines définitions, etc. (1).

Dans ces *Éléments*, les propriétés seront d'ailleurs énoncées « d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire ». A titre d'exemple Pascal énonce un théorème très important qui, en langage moderne, revient à affirmer l'égalité des rapports anharmoniques des faisceaux joignant deux points d'une conique aux sommets d'un quadrilatère inscrit dans cette courbe. Il est incontestable qu'à côté du « théorème de l'hexagone », cette proposition pouvait jouer un rôle très important dans l'édification d'une théorie unitaire des coniques (2) ; il s'agit en effet d'une autre forme de la condition pour que 6 points du plan appartiennent à une même conique.

Viennent ensuite une série d'autres propriétés dont chacune est annoncée par cette formule : « Nous démontrerons aussi (3). »

La première propriété énonce à la fois la propriété de projectivité du rapport anharmonique et une relation entre les segments déterminés par une conique sur les côtés d'un triangle, relation qui constitue un cas particulier du théorème dit de Carnot (4).

La seconde propriété, relation entre les segments déterminés par une conique sur les côtés d'un quadrilatère, est un autre cas particulier du théorème de Carnot (5).

La troisième propriété est le célèbre théorème de Desargues sur l'involution déterminée sur une sécante quelconque par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans une conique et par cette courbe elle-même (6). Pascal à cette occasion rend un vibrant hommage à son inventeur, Girard Desargues.

Il le cite en effet comme « un des grands esprits de ce temps, et des plus versés aux Mathématiques, et entre autres aux Coniques, dont les

(1) Ce plan couvre l'essentiel des quatre premiers livres des *Coniques* d'APOLLONIUS, les seuls publiés à cette époque.

(2) Cf. M. CHASLES, *Aperçu*, pp. 72-73.

(3) Ces propositions sont examinées plus en détail dans notre article précédemment cité (*Rev. Hist. Sci.*, VIII, 1955, pp. 13-17).

(4) La projectivité du rapport anharmonique est énoncée par PAPPUS (*Pappus*, II, pp. 672-675 : Proposition 129 du livre VII). CHASLES (*Aperçu*, pp. 33-35, 72, 334-341) a montré l'extrême fécondité de cette propriété, également utilisée par Desargues, Ph. de La Hire, Newton, Brianchon, Poncelet. Le théorème de Carnot est énoncé dans la *Géométrie de position*, Paris, 1803 (p. 435 : n° 378 ; voir aussi pp. 293-294).

(5) L. CARNOT, *Géométrie de position*, p. 437 : n° 379.

(6) *Desargues*, p. 143. Il est à noter qu'une erreur matérielle fausse l'énoncé reproduit par PASCAL (cf. *Rev. Hist. Sci.*, t. VIII, 1955, p. 16, n. 1).

écrits sur cette matière, quoique en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui en auront voulu recevoir l'intelligence. » (Je) « veux bien avouer, ajoute-t-il, que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter autant qu'il m'a été possible sa méthode sur ce sujet, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe » (1).

Enfin la quatrième propriété énoncée revient à exprimer sans l'aide de l'algèbre l'équation des coniques à centre rapportées à deux diamètres conjugués (2).

Pour conclure, Pascal annonce encore qu'il traitera divers autres problèmes dont il cite trois exemples : construction des tangentes à une conique passant par un point donné, détermination de diamètres conjugués faisant un angle donné, détermination de diamètres faisant entre eux un angle donné et ayant un rapport donné (3).

Après cette présentation des brillants résultats qu'il a déjà obtenus, Pascal termine son *Essay* par une déclaration de modestie.

Il affirme en effet que c'est la défiance qu'il a « de son peu d'expérience et de capacité » qui lui interdit « d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens qui voudront bien, dit-il, nous obliger d'en prendre la peine ». Mais « si l'on juge que la chose mérite d'être continuée », il tentera de la conduire jusqu'où Dieu lui « donnera la force de la conduire ».

Telle est la substance de ce texte très condensé, mais dont l'originalité et la richesse sont évidentes. Avant de tenter d'en reconstituer la genèse, il est essentiel de noter la reconnaissance très explicite de la dette que Pascal a contractée envers Desargues. L'affirmation est suffisamment claire et l'éloge assez chaleureux pour justifier certains emprunts presque textuels au *Brouillon project*.

Cependant, Pascal tient à souligner l'importance de son apport personnel dans cette entreprise qui, bien qu'orientée dans la même voie que celle de Desargues, fait appel au départ à des théorèmes originaux, particulièrement à celui « de l'hexagone inscrit ». En fait, c'est une méthode nouvelle d'étude unitaire des coniques qui se trouve ainsi esquissée et son intérêt s'est trouvé brillamment

(1) La méthode « du triangle par l'axe » était le fondement de l'étude des coniques par Apollonius (*Aperçu*, pp. 18-19) ; aussi avait-elle été adoptée jusqu'alors par tous les auteurs du XVII^e siècle, à l'exception de Desargues.

(2) Voir à ce sujet notre article précédemment cité (*Rev. Hist. Sci.*, VIII, 1955, p. 17, n. 2).

(3) Il s'agit de problèmes classiques traités dans les *Coniques* d'Apollonius.

confirmé par les travaux des géomètres du XVIII^e et du XIX^e siècles qui ont jeté les bases de la géométrie projective moderne.

Aussi serait-il particulièrement intéressant de retracer l'enchaînement des idées qui permirent au jeune Pascal de découvrir le célèbre « théorème de l'hexagone » et de saisir le rôle central que cette propriété pouvait jouer dans l'édification d'une théorie unitaire des coniques. L'*Essay pour les coniques* ne donne que peu d'éléments à ce sujet. Certes, le « théorème de l'hexagone » est mis à la place d'honneur, mais aucune justification n'est donnée à ce sujet. Les propriétés énoncées à la suite ne sont l'objet d'aucune démonstration et seule une phrase (1) affirme que c'est essentiellement à partir de ce théorème que l'auteur envisage d'édifier ses « Éléments coniques complets » où les propriétés seront énoncées « d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire ». Certes un lecteur actuel comprend assez facilement que ce programme de travail est inspiré par une pensée projective sous-jacente et déjà solidement élaborée ; mais ce fait risquait fort de passer inaperçu d'un mathématicien de l'époque. En effet, la méthode de projection n'intervient pas directement dans l'exposé et quelques éléments spatiaux n'apparaissent discrètement que dans l'assimilation entre droites concourantes et droites parallèles, dans la définition des « sections de cône » et dans l'énoncé du lemme destiné à étendre le « théorème de l'hexagone » au cas d'une conique quelconque. En dissimulant ainsi sa méthode de découverte et en entreprenant une étude projective plane des coniques, Pascal suit d'ailleurs l'exemple de Desargues qui, dans son *Brouillon project*, ramène presque toutes ses démonstrations au plan, bien qu'il signale à plusieurs reprises que de nombreuses propriétés ont été découvertes « par le relief » (2).

Pour tenter de jeter quelque lumière sur la genèse des idées pascaliennes, il est indispensable tout d'abord d'insister sur le fait que, dès cette époque, Pascal devait avoir parfaitement assimilé la doctrine de Desargues, non seulement dans la forme complexe où elle se trouve présentée dans le *Brouillon project*, mais aussi dans sa forme directement projective, issue d'une étude appro-

(1) « En suite de ces trois Lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des Éléments coniques complets... »

(2) Citons également le témoignage d'un autre disciple de Desargues, le graveur Abraham Bosse : « ... Monsieur Desargues a été d'abord à démontrer universellement, par les solides, ce qui n'est pas l'usage ordinaire de tous ceux qui se disent géomètres ou mathématiciens... » (A. BOSSE, *Traité des pratiques géométrales et perspectives*, Paris, 1665, p. 39).

fondie des fondements géométriques de la perspective et des propriétés de cette transformation. Il est nécessaire enfin de noter que son projet d'élaboration d'*Éléments coniques complets*, présentés sous une forme nouvelle, supposait d'excellentes connaissances de base dans ce domaine de la géométrie. On peut donc admettre que Pascal avait étudié attentivement les deux grands traités qui étaient alors classiques. Il s'agit tout d'abord des *Coniques* d'Apollonius dont les quatre premiers livres avaient été édités par Commandin en 1566 (1) et dont quelques éléments des livres V à VII avaient été transmis par Golius aux savants parisiens (2). Il s'agit aussi de la *Collection mathématique* de Pappus qui, publiée en traduction latine par Commandin en 1588 (3), passionna de nombreux mathématiciens du XVII^e siècle à cause des renseignements précieux, quoique souvent difficiles à interpréter, qu'elle apportait sur certains courants mal connus de la mathématique antique (4). Pascal devait connaître également le *Traité des coniques* (5) publié quelques années plus tôt par un ami de son père, Claude Mydorge, traité qui, assouplissant la méthode d'Apollonius, simplifiait certaines démonstrations en les étendant aux trois types principaux de coniques (6).

C'est à Desargues, sans nul doute, que Pascal doit aussi bien l'idée fondamentale de projection, sous-jacente à son œuvre, que l'assimilation, implicitement formulée, des points à distance finie et à l'infini, le théorème sur l'involution, la présentation des équations des coniques à centre. Mais c'est certainement de Pappus, et tout spécialement des lemmes se rapportant au premier livre

(1) *Apollonii Pergaei conicorum libri priores quatuor...*, Bologne, 1566.

(2) Cf. Lettre de Golius à Mersenne du 29 janv. 1630 (*Mersenne*, II, pp. 383-391).

(3) *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones...*, Pise, 1588.

(4) Pappus donnait en effet de précieux renseignements sur de nombreuses œuvres mathématiques antiques qui ne nous sont pas parvenues. Divers mathématiciens ont tenté, à partir du XVII^e siècle, de restituer certaines de ces œuvres en partant des commentaires de Pappus. Nous en rencontrerons plusieurs exemples : contacts coniques, lieux plans, lieux solides, problèmes à 3 et 4 droites, etc. Par ailleurs, différentes propriétés mentionnées par Pappus ont été largement employées. Pascal, en particulier, s'est peut-être inspiré de certaines propositions de Pappus dans ses travaux sur les coniques. Les lemmes relatifs au *Traité des porismes* d'EUCLIDE apportaient en effet des outils puissants pour l'étude de ces courbes.

(5) C. MYDORGE, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis...* liv. I et II, Paris, 1631, x-136 p. ; liv. I à IV, Paris, 1639, VI-308 p. Sur cette œuvre, cf. *Aperçu*, pp. 88-89.

(6) On doit noter cependant que, dans son ensemble, l'ouvrage de Mydorge reste fidèle à la méthode d'Apollonius.

des *Porismes* d'Euclide (1), que dérivent une partie des relations segmentaires énoncées par Pascal comme exemples d'application de sa méthode. Il est vrai que certaines de ces relations, qui reviennent à exprimer sous des formes diverses la condition pour que 6 points se trouvent sur une conique, peuvent être déduites du théorème de Desargues sur l'involution (2). Il est à noter également que le théorème de Ptolémée-Ménélaüs sur les segments déterminés par une sécante sur les côtés d'un triangle, largement employé par de nombreux auteurs (3), Mersenne en particulier, peut être utilisé utilement dans la démonstration de certaines relations (4). Enfin, plusieurs des propriétés mentionnées peuvent s'établir aisément dans le cas du cercle et s'étendre ensuite aux coniques par perspective (5).

Bien que la restitution des raisonnements pascaliens puisse ainsi être tentée en diverses directions, l'ensemble des propositions énoncées nous paraît rendre vraisemblable l'emploi simultané du théorème de Pascal, de différents lemmes de Pappus, du théorème de Ptolémée-Ménélaüs et de la relation de Desargues. Ces divers exemples découleraient ainsi logiquement, et de la façon la plus simple, des connaissances diverses rassemblées par Pascal sur ce problème des coniques.

Par contre, l'origine de la découverte la plus originale de Pascal, le « théorème de l'hexagone », demeure assez mystérieuse (6).

Il nous semble probable qu'après une étude attentive du *Brouillon project* de Desargues, Pascal avait compris que l'étude directe des coniques dans le plan reposait sur l'idée très simple que cinq points d'un plan déterminent une conique. De ce fait, la condition pour que six points appartiennent à une conique doit s'exprimer par une relation unique qui peut servir de définition commune à tous les types de coniques. Desargues, par son théorème sur l'involution déterminée sur une droite par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans une conique et par cette conique elle-même, avait montré qu'une telle relation pouvait servir de base à une étude d'ensemble des coniques. Cette idée fondamentale

(1) *Pappus*, t. II, pp. 669-717, n^{os} 127-163.
(2) Cf. *Aperçu*, pp. 33-35, 72, 334-341.
(3) Cf. *Aperçu*, pp. 291-294.
(4) Cf. notre article précédemment cité (*Rev. Hist. Sci.*, VIII, 1955, p. 14, n. 2).
(5) *Ibid.*, p. 15, n. 3.
(6) L'article de P. Costabel (ci-dessous, pp. 253-268) apporte d'intéressants éléments à ce sujet.

étant bien comprise, il était naturel de chercher s'il existait des relations équivalentes, mais d'énoncé plus simple et plus concret (1). L' « hexagone de Pascal » répondait parfaitement à cette recherche, son énoncé étant plus immédiatement figuré que la relation d'involution de Desargues et son application se révélant souvent très commode.

Ces considérations justifient plus qu'elles n'expliquent la remarquable découverte de Pascal. Il resterait à tenter de reconstituer l'orientation des recherches qui ont permis d'aboutir en un temps très court à un si brillant résultat. Certes, et nous reviendrons sur ce point, il y a équivalence entre la relation de Desargues, le théorème de Pascal et d'autres formulations de la condition pour que 6 points du plan appartiennent à une même conique, tels le célèbre problème à 4 droites de Pappus et le théorème de Newton exprimant la constance du rapport entre les produits des distances d'un point variable d'une conique donnée aux couples de côtés opposés d'un quadrilatère inscrit (2). Mais il semble peu probable que Pascal ait déduit son théorème de la relation d'involution de Desargues. Nous formulerons plus volontiers l'hypothèse que Pascal a eu l'idée de généraliser le cas particulier correspondant à une conique réduite à deux droites qui se trouve énoncé et démontré comme lemme 139 du livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus (3). Pensant que cette propriété d'alignement des 3 intersections des côtés opposés d'un hexagone inscrit pouvait peut-être s'appliquer à une conique quelconque, il l'aurait alors démontrée pour le cercle (par application relativement simple de la relation de Ptolémée-Ménélaüs) et l'aurait ensuite étendue par projection à une conique quelconque (4). Réalisant qu'il disposait ainsi d'une définition nouvelle et particulièrement élégante d'une conique quelconque du plan, Pascal aurait alors envisagé l'édification d'une

(1) CHASLES (*Aperçu*, pp. 334-341) montre d'une façon précise l'équivalence des nombreuses définitions possibles d'une conique définie par 5 points. Bien qu'il propose un théorème plus général comme base d'une étude projective plane des coniques, il montre que le « théorème de l'hexagone » permet d'établir les autres propositions qu'il cite, dont la relation d'involution de Desargues, et réciproquement.

(2) Cf. note précédente.

(3) *Pappus*, II, pp. 687-688. Les propositions 134, 138, 141 et 143 sont, ou la réciproque, ou des cas particuliers de cette proposition 139 (*Aperçu*, pp. 36-37).

(4) Une phrase de Fermat (Lettre à Carcavy, 1656 : *Fermat*, II, p. 319) : « Le porisme des Anciens à la description des sections coniques me semble très joli, mais je n'ai pas le loisir de l'examiner pour à cette heure », justifierait cette hypothèse, du moins si elle s'applique à Pascal.

théorie d'ensemble des coniques. L'*Essay* de 1640 correspond, semble-t-il, à une phase relativement peu avancée de son travail d'élaboration. En effet, la plupart des propriétés qu'il cite, bien qu'intéressantes, représentent plutôt de nouvelles définitions pouvant être utilisées dans les démonstrations projetées que des propriétés directement utilisables, ou des problèmes classiques qui auraient été démontrés ou étudiés par sa méthode. Ce n'est qu'à la fin de son *Essay* qu'il mentionne les énoncés de trois problèmes de construction et qu'il annonce avoir « plusieurs autres problèmes et théorèmes et plusieurs conséquences des précédents ». Ainsi la rédaction d'*Éléments coniques complets*, dont il donne les principaux titres de chapitres, n'apparaît-elle encore qu'à l'état d'espoir. Mais cet espoir, qui repose sur une compréhension très claire du fond même de la question, se concrétisera dans les travaux ultérieurs de Pascal, et en particulier dans son grand *Traité des coniques*, que nous tenterons de reconstituer à partir des rares éléments qui nous restent à son sujet. Chemin faisant, nous rencontrerons la trace d'autres travaux géométriques de Pascal qui sont également perdus et qui, pour la plupart, semblent avoir été réalisés en liaison plus ou moins directe avec son étude projective des coniques.

Mais afin d'éclairer nos commentaires, nous reproduirons tout d'abord les deux documents essentiels sur lesquels repose nécessairement toute analyse de l'œuvre géométrique de Pascal.

III. — Les deux principaux documents

Désirant probablement renouer plus étroitement avec le groupe de savants français qui se réunissaient alors chez F. Le Pailleur (1), Pascal, en 1654, dressa à leur intention un bilan des différents ouvrages scientifiques dont il avait terminé ou entrepris la rédaction. Le premier texte cité est constitué par les passages de cette « Adresse » qui se rapportent à la géométrie. Nous les reproduirons dans l'excellente traduction de G. Chabauty publiée dans la récente édition des *Œuvres complètes* de Pascal établie par J. Chevalier (2).

(1) Sur l'identification de cette « Académie », voir, dans le prochain fascicule, un article de J. Mesnard qui rectifie l'hypothèse émise *in* G.E., II, pp. 296-297.

(2) PL, pp. 1402-1403. Le texte latin original a été publié par Bossut (*Bossut*, t. IV, pp. 408-411). Il est reproduit (G.E., III, pp. 305-308 ; PL, pp. 73-74) d'après une copie conservée dans les papiers de Leibniz à Hanovre.

Une certaine prudence sera indispensable dans l'interprétation de ce document. En effet d'autres renseignements montrent que certains traités présentés comme terminés n'étaient pas entièrement mis au point. Aussi peut-on penser que d'autres, cités comme étant en cours de réalisation, n'étaient peut-être encore qu'à l'état d'ébauche.

1. — Extraits de l' « Adresse a l'Académie parisienne »

A la très illustre Académie parisienne de Science,

Ces travaux, savants très illustres, je vous les donne ou je vous les rends : en effet je considère comme vôtres ceux que je n'aurais pas fait miens si je n'avais été formé parmi vous ; mais je reconnais comme mon bien propre ceux que je considère ici comme indignes de Géomètres éminents. En effet seuls vous plaisent les résultats importants et démontrés excellemment. Mais en vérité le génie audacieux de l'invention est donné à peu de gens, à moins encore (à mon avis) le génie délicat de la démonstration, et très rares sont ceux doués des deux à la fois. Je me serais donc tu, n'ayant rien qui soit digne de vous, si je n'avais su que cette bienveillance, qui m'a soutenu dès mes plus jeunes années dans votre docte Assemblée, accueillerait même ces offrandes, quoi qu'elles puissent valoir.

Le premier de ces opuscules traite... des enceintes...

. . . .

Mais ensuite, s'il plaît à Dieu, paraîtront aussi d'autres traités entièrement préparés, et dont les titres suivent...

Généralisation de l'Apollonius françois, c'est-à-dire les contacts circulaires, non seulement tels que les connaissaient les Anciens et que Viète les a restitués, mais encore généralisés au point qu'ils supportent avec peine le même titre.

Les contacts sphériques, aussi largement généralisés, puisque traités par la même méthode. En effet la méthode des uns et des autres résout chacun de leurs problèmes par le plan, et tire son origine d'une propriété remarquable des sections coniques, qui est d'un grand secours pour beaucoup d'autres problèmes très difficiles ; et la démonstration tient à peine en une page.

Les contacts coniques aussi, où, cinq éléments étant pris à volonté parmi cinq points et cinq droites [on détermine] la section conique [passant par les points et tangentes aux droites].

Les lieux solides, entièrement complets, dans tous les cas et à tous égards.

Les lieux plans, non seulement ceux que le temps a arrachés aux Anciens, mais encore ceux que le plus illustre géomètre de notre âge a maîtrisés, après avoir restitué les premiers, mais d'autres encore, inconnus jusqu'à ce jour, qui embrassent les précédents et les débordent largement, par une méthode qu'il est permis de croire absolument nouvelle, parce qu'elle apporte des résultats nouveaux, par une voie cependant beaucoup plus courte.

L'œuvre complète des coniques, comprenant et les coniques d'Apollonius et d'innombrables autres résultats, par une seule proposition ou presque, invention que j'ai faite quand je n'avais pas encore atteint l'âge de seize ans, et que plus tard j'ai mise en ordre.

Une méthode de perspective : aucune de celles déjà inventées, ou qu'on puisse inventer, ne peut être considérée comme plus brève et plus avantageuse que celle-là, puisqu'elle fournit les points du dessin par l'intersection de deux droites seulement ; il est absolument impossible d'être plus rapide...

Je ne parlerai pas du gnomon, ni de recherches variées et sans nombre que j'ai assez bien en main ; à la vérité elles ne sont ni achevées ni dignes de l'être... (1).

Tels sont les fruits mûrs de notre Géométrie ; heureux et immensément bénéficiaires, si pour vous les avoir communiqués, nous ramenions en échange quelques-uns des vôtres.

Fait à Paris, 1654.
B. PASCAL.

* * *

Le second document que nous reproduisons, afin de pouvoir le commenter plus aisément, est une lettre adressée par Leibniz à Étienne Périer le 30 août 1676. Nous citons ce texte d'après le brouillon qu'en avait gardé Leibniz (2) et une copie reproduite dans les diverses éditions des *Œuvres de Blaise Pascal* (3). Dans cette lettre, Leibniz décrit les différents manuscrits de Blaise Pascal touchant aux coniques qui lui avaient été prêtés par les frères Périer. En leur restituant ces documents, il donne quelques précisions, tant sur leur contenu que sur les aménagements qu'il a effectués afin d'en permettre la publication rapide. Malheureusement, ce grand *Traité des coniques* ne fut pas édité et son manuscrit semble définitivement perdu. Les seuls renseignements qui nous restent sur cet ouvrage sont donnés dans cette lettre et dans quelques notes prises par Leibniz et qui se trouvent à la suite, reproduites et traduites par P. Costabel. Aussi ce document est-il d'une valeur inestimable pour l'appréciation de l'œuvre géométrique de Pascal.

(1) Une liste plus longue, mais moins explicite, de travaux annoncés par Pascal est signalée dans une lettre de Huygens à Fr. Van Schooten du 27 déc. 1654 (*Huygens*, II, pp. 316-317 ; G.E., III, p. 309). Cette liste avait été transmise de Paris à Van Schooten.

(2) Bibl. royale de Hanovre, *Leibniz Handschr.*, Abt. 35 : *Mathematica*, v. 15, 1, n° 3.

(3) *Bossut*, V, pp. 459-462 ; *Desargues und Pascal*, pp. 193-194 (citation partielle) ; *Briefwechsel*, pp. 133-135 ; G.E., II, pp. 220-224 ; PL, pp. 63-65. Il existe quelques divergences entre ces textes qui sont tous partiellement fautifs. Nous suivrons la transcription moderne donnée dans PL, mais en rectifiant les principales erreurs à l'aide de la minute originale de Leibniz dont nous donnerons ultérieurement une édition critique.

2. Lettre de Leibniz a Périer

Ma lettre a Mons. Périer, conseiller du Roi a la Cour des Aides de Clermont-Ferrand.

Monsieur,

Vous m'avez obligé sensiblement, en me communiquant les manuscrits qui restent de feu M. Pascal, touchant les coniques (1). Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter par la lecture des méditations d'un des meilleurs esprits du siècle : je souhaiterais pourtant de les avoir pu lire avec un peu plus d'application ; mais le grand nombre de distractions, qui ne me laissent pas disposer entièrement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je crois les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à votre demande, et pour vous dire que je les tiens assez entières et finies pour pouvoir paraître à la vue du public. Et, afin que vous puissiez juger si je parle avec fondement, je veux vous faire un récit des pièces dont elles sont composées, et de la manière que je crois qu'on les peut ranger.

I. — Je crois qu'il faut commencer par la pièce dont l'inscription est : *Generatio conisectionum tangentium et secantium ; seu projectio peripheriae, tangentium, et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus.* Car c'est le fondement de tout le reste. Les figures y sont [sur deux papiers détachés] insérées.

II. — Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme mystique et il fait voir par le moyen des projections que tout Hexagramme mystique convient à une section conique, et que toute la section conique donne un Hexagramme mystique. J'ai mis au-devant ces mots, *De Hexagrammo mystico et conico.* Une partie de cette pièce se trouve répétée et insérée mot à mot dans une autre, savoir, les définitions (avec leurs corollaires), et les propositions (mais sans les démonstrations) se trouvent répétées dans le traité *De loco solido*, dont je parlerai ci-dessous. Je crois même que les figures du traité *De loco solido* suppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci, *De Hexagrammo* (2).

[L'usage de l'Hexagramme paraît dans les traités suivants.]

(1) Le brouillon d'un reçu délivré par Leibniz aux frères Périer pour le prêt des cahiers 6 à 14 des ouvrages géométriques de Pascal : Paris, 4 juin 1675 (Bibl. roy. de Hanovre, L.H., Abt. 35, v. 14, 1, f° 302) et un passage de sa lettre à Oldenburg du 12 juin 1675 (*Briefwechsel*, p. 126) montrent que Leibniz avait eu précédemment en prêt une autre série de manuscrits comprenant, semble-t-il, les *Éléments de géométrie* déjà cités.

(2) A la suite se trouve une phrase incomplète et raturée, qui n'a pas été signalée jusqu'à présent, mais dont l'importance est évidente :

« III. Et comme il arrive que quelques-unes de ces six droites qui forment l'Hexagramme sont infiniment petites, c'est de là que viennent les propriétés des touchantes des sections du Cône, expli ».

Le III^e traité doit être, à mon avis, celui qui porte cette inscription : *De quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur.* Car c'est là-dedans que l'usage de l'Hexagramme paraît, et que les propriétés des centres et des diamètres des sections coniques sont expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien.

Le IV^e traité est : *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium.* Car les propriétés fondamentales des sections coniques qui dépendent de la connaissance du centre et des diamètres étant expliquées dans le traité précédent, il fallait donner quelques belles propriétés universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique ; et c'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y sont aussi, et je ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce traité une feuille qui porte pour titre ces mots : *De correspondentibus diametrorum*, dont la troisième page traite *de summa et differentia laterum, seu de focis.*

Le V^e traité est : *De tactionibus conicis*, c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), *de punctis et rectis quas sectio conica attingit* ; mais je n'en trouve pas les figures (1).

Le VI^e traité est *De loco solido* : j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y en a point : c'est sur le même sujet que Messieurs Descartes et Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. C'est là le fruit de la doctrine des sections coniques, car les lieux solides servent à la résolution des problèmes solides. Or je crois que M. Pascal a voulu donner ce traité à part, ou le communiquer au moins à ses amis, parce qu'il y répète beaucoup de choses du deuxième traité, mot à mot et assez au long. Et c'est pourquoi il commence par ceci : *Definitiones excerptae ex conicis* ; savoir, du deuxième traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, *hexagrammum conicum mysticum*, etc. On peut juger par là que les I^{er}, II^e, III^e, IV^e et peut-être V^e traités (2), devraient faire proprement les coniques ; et ce mot se trouve aussi au dos du premier traité. Les grandes figures colorées (3) appartiennent à ce VI^e traité.

J'ai mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé dont

(1) Cette dernière phrase est en marge de la copie de Hanovre. Avant le paragraphe suivant, se trouve un passage raturé où Leibniz explicite sa pensée :

« Je juge que ces cinq traités contiennent entièrement les *Éléments des coniques* et qu'il n'y manque plus rien. C'est pourquoi on a mis au dos de la première partie ce mot : *Coniques*.

« J'avais un scrupule qui me faisait douter si l'ouvrage était entier, car je voyais une pièce qui portait pour titre *Excerpta ex Conicis*, ce qui me faisait croire que Mons. Pascal avait fait quelques autres Coniques qu'il citait dans ceux-ci. Mais je me suis éclairci entièrement là-dessus, car j'ai vu que Mons. Pascal, après avoir donné les *Éléments des coniques* a ajouté... »

(2) Nous adoptons la lecture de Gerhardt (*Desargues und Pascal*, p. 194), conforme à la minute de Leibniz. Son sens est d'ailleurs pleinement satisfaisant.

(3) *Ibid.*

le titre est *Essay des coniques* (1) ; et comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espère que vous permettrez, monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *De restitutione coni*, savoir, les diamètres et paramètres étant donnés, retrouver les sections coniques. Le discours paraît entier, et a ses figures. Il y a un autre fragment où se trouvent ces mots au devant, *Magnum problema* ; et je crois que c'est celui-ci qui y est compris : *Dato puncto in sublimi, et solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datae similem* : mais cela n'est pas mis au net.

Il y a quelques problèmes sur une autre feuille, qui sont comptés (?) ; mais il en manque le premier : on en tirera ce qu'on pourra en forme d'appendice ; mais le corps de l'ouvrage, composé des VI traités (2), est assez net et achevé.

Je conclus que cet ouvrage est en état d'être imprimé ; et il ne faut pas demander s'il le mérite. Je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paraître des traités qui ont quelque rapport à ce qui est dit dans celui-ci (3). C'est pourquoi je crois qu'il est bon de le donner au plus tôt, avant qu'il perde la grâce de la nouveauté (4).

J'en ai parlé plus amplement à messieurs vos frères, dont je vous dois la connaissance, et que j'ai priés de me conserver l'honneur de votre bienveillance. J'avais espéré de vous revoir un jour ici ; mais je vois que vos affaires ne l'ont pas encore permis. Et j'ai peu d'espérance de passer par Clermont. Je souhaiterais de vous pouvoir donner des marques plus convaincantes de l'estime que j'ai pour vous, et de la passion que j'ai pour tout ce qui regarde feu M. Pascal ; mais je vous supplie de vous contenter cependant de celles-ci. Je suis, Monsieur,

Votre très humble &.

(1) Il s'agit de l'*Essay pour les coniques*, dont, effectivement, un exemplaire demeure dans les papiers de Leibniz (L.H., Abt. 35, v. 15, 1, f° 10). On notera que Leibniz n'en cite pas correctement le titre.

(2) On trouve « IV traités » dans certaines éditions (G.E., II, p. 223 ; PL, p. 65). Nous écrirons « VI traités » avec GERHARDT (*Briefwechsel*, p. 135), en conformité avec l'original.

(3) Ici se trouvent, dans la copie de Hanovre, quelques lignes raturées qui contiennent cependant des indications intéressantes :

« Et il n'y a pas longtemps qu'on a donné une nouvelle méthode des Sections Coniques dont l'auteur était ami de Mons. de Bosse et disciple de Mons. Desargues qui était grand ami de Mons. Pascal. Et cet auteur parle aussi des proprietés des lignes coupées harmoniquement et de leur usage aux Coniques d'une manière fort approchante de celle-ci. Et je m'en étonne d'autant moins que Mons. Pascal a toujours avoué qu'il devait beaucoup à Mons. Desargues en ces matières. Quoi qu'il en soit, il ne faut pas tarder davantage afin que ces pensées ne perdent pas la grâce de la nouveauté. »

(4) Leibniz fait ici allusion à l'ouvrage de Philippe de LA HIRE : *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques...* (Paris, 1673), qui, inspiré des mêmes idées projectives, développait également une étude unitaire des coniques dans le plan. Bien que la méthode de La Hire, fondée sur l'emploi d'une transformation par homologie, soit différente de celles de Desargues et de Pascal, elle a cependant beaucoup d'affinités avec elles (voir ci-dessous, p. 250).

***

L' « Adresse » et la « Lettre à Périer » contiennent deux listes de travaux géométriques de Pascal que nous nous efforcerons d'identifier d'une façon plus précise. A cette fin, il est commode d'établir une correspondance entre certains des travaux mentionnés dans l'un et l'autre documents.

Nous désignerons les recherches mentionnées dans l' « Adresse » par des lettres majuscules :

Contacts circulaires (A), contacts sphériques (B), contacts coniques (C), lieux solides (D), lieux plans (E), œuvre complète des coniques (F), méthode de perspective (G), gnomon (H).

Conservant la numérotation introduite par Leibniz dans sa « Lettre à Périer », nous la compléterons par la mention des fragments signalés à la fin de la lettre :

De restitutione coni (VII), *Magnum problema* (VIII) et problèmes non précisés (IX).

Les travaux A, B, E, G et H de l' « Adresse » ne semblent pas avoir d'équivalents dans la liste de la « Lettre ». Par contre, il y a correspondance entre C et V, entre D et VI et, semble-t-il, entre F et I, II, III, IV et peut-être VII et VIII.

Sous le titre de « Divers travaux géométriques », nous considérerons tout d'abord les recherches mentionnées dans l' « Adresse » et qui ne se retrouvent pas dans la « Lettre à Périer » : contacts circulaires, contacts sphériques, lieux plans, perspective, gnomonique. Nous aborderons ensuite deux importants problèmes, les lieux plans et les contacts coniques, qui sont mentionnés dans les deux pièces, mais que Pascal, dans son « Adresse », considère comme ne faisant pas partie de l' « œuvre complète des coniques » ; nous traiterons également des fragments VII, VIII et IX.

Il ne nous restera plus alors qu'à tenter de reconstituer les grandes lignes de ce *Traité des coniques*, en utilisant aussi bien les deux documents cités que tous les autres renseignements, de valeur très inégale, que nous pourrons réunir à ce sujet.

IV. — Divers travaux géométriques

Afin d'éclairer les commentaires qui suivent, il nous paraît utile de mentionner très brièvement la liste chronologique des rares références aux travaux géométriques de Pascal qui apparaissent de son vivant, le texte exact de ces références étant cité à la suite, au cours de l'étude des travaux correspondants.

Du début de 1640 à mai 1647, Pascal séjourne à Rouen et, malgré les voyages qu'il fait à Paris de temps à autre, il ne peut demeurer en contact aussi étroit avec les savants de la capitale. Peut-être reste-t-il cependant en relations avec Mersenne, Roberval, Carcavy, Mydorge, et quelques autres géomètres qui semblent avoir apprécié son *Essay*. Peut-être également a-t-il pu avoir avec Desargues quelques fructueux entretiens touchant en particulier à la théorie des coniques.

Toujours est-il qu'à la fin de 1642, Desargues semble attendre la démonstration prochaine « de cette grande proposition nommée la Pascale » dont « les quatre premiers Livres d'Apollonius » sont « une conséquence immédiate » (1). Cette mention élogieuse des travaux de Pascal faite par le géomètre le mieux qualifié pour les apprécier montre que le programme de travail développé dans l'*Essay* est alors en bonne voie de réalisation.

En 1644, c'est Mersenne qui, dans la préface de ses *Cogitata physico-mathematica*, signale que, par une seule proposition très générale, Pascal a pu établir 400 corollaires, couvrant presque tout le champ du traité d'Apollonius (2).

Tels sont les deux seuls témoignages que nous ayons sur les travaux géométriques de Pascal avant son retour à Paris en 1647. Le 17 mars 1648, Mersenne apprend à Constantin Huygens que Pascal vient de terminer une remarquable solution géométrique du problème de Pappus (3).

En 1654, en dehors de l' « Adresse », il faut citer une lettre du 29 juillet où Pascal annonce à Fermat qu'il termine « des traités géométriques » sur lesquels il travaille « il y a déjà quelque temps » ; Pascal y propose également des problèmes de contacts circulaires et sphériques (4). En 1654, Schooten reçoit également une liste des travaux mathématiques de Pascal (5).

Dans une lettre à Carcavy, qui semble devoir être datée de 1656, Fermat résout divers problèmes géométriques proposés par Pascal

(1) Voir ci-dessous, p. 233.
(2) Ci-dessous, p. 233.
(3) Ci-dessous, p. 226.
(4) Ci-dessous, pp. 220-221.
(5) Cf. ci-dessous, p. 212, n. 1.

et critique l'attitude défavorable de ce dernier à l'égard de l'analyse spécieuse (1).

Il ne reste plus guère à citer que la mention de quelques problèmes, touchant en particulier aux contacts coniques, adressés par Pascal à Sluse en 1657 (2).

Bien qu'elle soit complétée fort heureusement par l' « Adresse » et par la « Lettre à Périer », cette maigre moisson ne nous apporte que peu d'éléments chronologiques. Cependant une étude attentive des questions étudiées permet, sinon de reconstituer les travaux mentionnés, du moins d'en situer l'esprit et les grandes lignes.

1. *Les contacts circulaires et les contacts sphériques*

Nous envisagerons d'abord les deux traités des contacts circulaires et des contacts sphériques qui, mentionnés dans l' « Adresse » au premier rang des ouvrages géométriques, ne se trouvent pas signalés par Leibniz dans sa « Lettre à Périer ».

Le premier de ces traités est celui des contacts circulaires qui traitait des problèmes relatifs à la construction de cercles soumis à trois conditions des types suivants : passer par un point donné, être tangent à une droite donnée, être tangent à un cercle donné. Cet ensemble de dix problèmes a fait l'objet d'un traité d'Apollonius, *Des contacts*, traité en deux livres qui est perdu et ne nous est connu que par l'analyse qu'en fait Pappus (3). Ce dernier ramène à un énoncé unique les dix problèmes particuliers qui s'y trouvent étudiés :

> Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés (dans le cas de points donnés), soit tangent à chacune des lignes données (4).

Il signale que la diversité des cas de figures étudiés amenait Apollonius à introduire 21 lemmes et 60 théorèmes (5).

En 1600, Viète publia une restitution des deux livres perdus d'Apollonius (6), dans laquelle il donnait une solution géométrique

(1) Lettre de Fermat à Carcavy, 1656 (*Fermat*, II, pp. 315-316).

(2) Cf. ci-dessous, p. 232.

(3) *Pappus*, II, pp. 483-485, 633-658 : prop. 96 à 118 ; cf. également I, pp. LXVI-LXXII.

(4) *Pappus*, II, p. 483.

(5) *Pappus*, II, pp. 484-485.

(6) *Francisci Vieta Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria. Ad. V. C. Adrianum Romanum belgam*, Paris, 1600. Le problème des trois cercles avait été traité par Viète et par Adrien Romain, respectivement en 1596 et 1597.

des dix problèmes considérés, solution ne faisant intervenir que des droites et des cercles. Il critiquait par ailleurs Adrien Romain qui, pour construire un cercle tangent à trois cercles donnés, utilisait l'intersection de deux hyperboles : « En touchant le cercle par des hyperboles, écrit-il, tu ne touches pas la chose finement (1). »

Partant de la restitution de Viète, l'*Apollonius Gallus*, Pascal affirme avoir généralisé le problème des contacts circulaires « au point qu'ils supportent avec peine le même titre ». En fait, comme le montre un passage d'une lettre à Fermat écrite en 1654 (2), année de rédaction de son « Adresse », cette généralisation consiste à remplacer l'un des types de conditions : être tangent à une droite, par une condition plus générale : couper une droite sous un angle donné. De ce fait, six des dix problèmes se trouvaient présentés sous une forme plus générale. Quant à sa méthode, Pascal indique qu'il résout ces problèmes, aussi bien que ceux des contacts sphériques, « par le plan » (c'est-à-dire uniquement avec des droites et des cercles). Il signale toutefois que sa méthode « tire son origine d'une propriété remarquable des sections coniques » ; s'il ne précise pas la nature de cette propriété, il affirme qu'elle « est d'un grand secours pour beaucoup d'autres problèmes très difficiles » et que la démonstration ainsi conçue « tient à peine une seule page ». Ces indications ne permettent guère de restituer cet écrit de Pascal ; du moins montrent-elles que l'étude de ces problèmes de contact est directement liée à ses travaux sur les coniques.

Les problèmes de contacts sphériques, au nombre de 15, consistent à construire une sphère déterminée par quatre conditions choisies parmi les trois types suivants : passer par un point, être tangent à un plan, être tangent à une sphère. Les auteurs de l'Antiquité ne semblent pas avoir traité ces problèmes ; par contre, Fermat, dans un texte de date indéterminée, mais certainement très antérieur à 1654, avait généralisé à l'espace l'étude de Viète sur la restitution du traité *Des contacts* d'Apollonius. Le mémoire de Fermat (3), rédigé dans un style clair et élégant, n'utilise que les méthodes de géométrie pure ; mais, comme toujours, Fermat se borne à une présentation rapide et n'entre pas dans l'examen des

(1) Cf. F. VIÈTE, *Opera mathematica*, éd., Fr. VAN SCHOOTEN, Leyde, 1646, p. 325.

(2) Voir ci-dessous, pp. 220-221.

(3) *Fermat*, t. I, pp. 52-69 : De contactibus sphaericis ; trad. fr. : Des contacts sphériques (*Fermat*, III, pp. 49-66). Cet essai a probablement été rédigé à l'instigation de Descartes. Cf. *Aperçu*, pp. 65-68 ; J. ITARD, *Pierre Fermat*, Bâle, 1950, p. 4.

différents cas et dans la détermination du nombre des solutions.

Descartes, de son côté, pose dès le 15 avril 1630 (1) l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des contacts sphériques, la construction d'une sphère tangente à quatre sphères données, et annonce l'avoir résolu par la géométrie pure. En 1638, il propose à nouveau cette question, d'abord dans une lettre à Mersenne à l'intention des mathématiciens parisiens (2), puis réitère sa demande spécialement à l'intention de Fermat (3). Peu après, il donne une solution analytique de ce problème qui, sous une forme plus particulière, constitue le 5e exemple de son *Introduction à la Géométrie* (4) : « Estant donné quatre globes qui s'entre-touchent, trouver le cinquième qui les enferme et touche tous quatre. »

Bien qu'il s'agisse d'un cas particulier, la solution cartésienne est relativement compliquée et ne constitue pas une démonstration particulièrement probante de la puissance et de la commodité d'emploi de la nouvelle géométrie.

Pascal semble avoir généralisé ces divers problèmes de la même façon que ceux de géométrie plane et affirme avoir employé pour les résoudre une même méthode, fondée sur la considération des sections coniques. Un passage de sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654 nous éclairera quelque peu à ce sujet sans permettre toutefois de préciser la méthode employée :

De même j'ai résolu ce problème :

De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données,

(1) Descartes à Mersenne, 15 avril 1630 (A.T., I, p. 138 ; *Corr. Descartes*, I, p. 131 ; *Mersenne*, II, p. 425). Dans cette lettre Descartes pose trois problèmes « que, dit-il, j'ai autrefois trouvés sans aide que de la géométrie simple, c'est-à-dire avec la règle et le compas ». Le premier d'entre eux consiste à trouver le diamètre de la sphère tangente à quatre autres données en grandeur et position.

(2) Descartes à Mersenne, 13 juillet 1638 (A.T., II, pp. 246-247 ; *Corr. Descartes*, III, 347 ; *Mersenne*, VII, 340-341). Parlant de la fin du texte de l'*Introduction à la Géométrie*, adressé dans le même envoi, Descartes écrit : « Ce reste ne contient que 5 ou 6 exemples, ... le dernier est, ayant quatre globes donnés, en trouver un cinquième qui les touche, duquel je ne crois pas que vos analystes de Paris puissent venir à bout. »

(3) Descartes à Mersenne, 11 octobre 1638 (A.T., II, p. 293 ; *Corr. Descartes*, III, p. 88).

(4) L'*Introduction à la Géométrie* fut probablement rédigée par G. de HAESTRECHT (cf. *Mersenne*, VII, p. 453). Seule l'une des copies connues comporte le 5e exemple qui a été publié pour la première fois par Ch. ADAM et G. MILHAUD (*Corr. Descartes*, III, pp. 346-352), puis à nouveau par C. DE WAARD (*Mersenne*, VII, pp. 453-462).

passe par les points donnés, et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés ;
et celui-ci :

De trois cercles, trois points, trois lignes (trois) quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur la ligne un arc capable d'un angle donné.

J'ai résolu ces problèmes *plainement* (1), n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites. Mais dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles. Je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane, et doit passer pour telle (2).

Les problèmes de ce type ont été étudiés par de nombreux géomètres du XIXe siècle. Il serait vain de tenter de restituer le raisonnement pascalien à l'aide de données aussi vagues que celles fournies par l' « Adresse » et par cette lettre. Notons toutefois que, bien que sa solution soit liée aux propriétés des coniques, Pascal tient toutefois à affirmer qu'elle « est plane et doit passer pour telle », puisque la construction finale ne fait intervenir « que des cercles et des lignes droites ».

2. *Les lieux plans*

Nous mentionnerons ce traité de Pascal avant celui des lieux solides qui le précède dans la liste de l'Adresse, afin de rétablir un ordre plus logique, et, aussi, parce qu'il ne semble pas avoir figuré parmi les manuscrits consultés par Leibniz.

Les lieux plans, c'est-à-dire les lieux géométriques exclusivement formés de droites et de cercles (3), faisaient l'objet d'un traité d'Apollonius, en deux livres, *De Locis planis*, traité qui est perdu, mais dont le contenu a été résumé par Pappus dans sa *Collection mathématique* (4). La publication par Commandin en 1588 d'une traduction latine de cet ouvrage (5) avait amené plusieurs

(1) « Plainement », c'est-à-dire « par le plan ».

(2) G.E., III, p. 391 ; PL, p. 82 ; *Fermat*, II, p. 298. FERMAT résout un problème plan de ce type dans une lettre à Carcavy de 1656, destinée à Pascal (*Fermat*, II, pp. 316-317) ; SLUSE en signale un cas dans une lettre à Brunetti du 28 oct. 1667 (*Huygens*, II, pp. 72-73).

(3) On sait qu'à cette époque on distinguait entre les lieux plans, formés de droites et de cercles, les lieux solides, constitués de coniques et les lieux de lignes ou lieux sursolides, comportant des courbes de degré supérieur. Cette distinction avait été introduite par les mathématiciens de l'Antiquité (cf. *Pappus*, II, pp. 495-497) et était adoptée par la plupart des mathématiciens, tels que Descartes, Fermat, etc. (voir à ce sujet, *Mersenne*, III, pp. 258-259 ; *Fermat*, III, p. 85).

(4) *Pappus*, II, pp. 495-501 ; *ibid.*, t. I, pp. LXXIII-LXXVI et t. II, pp. 658-669.

(5) *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones...*, Pise, 1588.

mathématiciens à tenter la restitution du traité d'Apollonius. Fermat en particulier, à qui Pascal fait allusion en le désignant comme « le plus illustre géomètre de notre âge », avait réalisé cette restitution par la géométrie pure, le livre II dès 1629, le livre Ier vers 1636 (1). Bien que ce travail de Fermat n'ait été publié qu'en 1679 dans ses *Varia Opera mathematica* (2), il avait été assez largement répandu auparavant et Étienne Pascal, en particulier, en avait possédé une copie dès 1637 (3). Par ailleurs, cette question avait fait l'objet de plusieurs échanges de correspondances à cette époque (4).

Dès qu'il fut en possession de sa méthode de géométrie analytique, Fermat reprit l'examen des lieux géométriques et rédigea son célèbre mémoire *Ad locos planos et solidos Isagoge* (5), qui date d'environ 1636.

Sur la méthode pascalienne d'étude des lieux plans, nous ne possédons guère que le court paragraphe qui s'y rapporte dans l' « Adresse » de 1654 et un passage d'une lettre de Fermat de 1656.

La brève note de Pascal souligne l'ampleur de son étude qui, semble-t-il, fait intervenir des énoncés plus généraux « qui embrassent les précédents et les débordent largement ». Elle souligne également la nouveauté de la méthode utilisée qui « apporte des résultats nouveaux, par une voie cependant beaucoup plus courte ». La comparaison qui apparaît implicitement se rapporte sans nul doute à la restitution de Fermat.

Sur la méthode pascalienne elle-même, la seule indication que nous possédions se trouve dans une lettre où Fermat, en 1656,

(1) FERMAT, Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restitute (*Fermat*, I, pp. 3-51 ; trad. fr. : Restitution des deux livres des lieux plans d'Apollonius de Perge, *ibid.*, III, pp. 3-48).

(2) P. FERMAT, *Varia Opera mathematica*, Toulouse, 1679, pp. 12-43.

(3) Le mémoire de Fermat avait, en effet, été examiné à l'Académie du P. Mersenne en avril 1637 et Étienne Pascal en avait gardé une copie (*Fermat*, t. II, p. 102).

(4) Voir en particulier *Mersenne*, VI, pp. 53, 58-59, 129 ; VII, p. 21. Par exemple : Fermat à Mersenne, 26 avril 1636 : « J'ai rétabli entièrement le traité d'Apollonius, *De Locis planis* » (*Mersenne*, VI, p. 53).

(5) Ad locos planos et solidos Isagoge (*Fermat*, I, pp. 91-110 ; trad. fr. : Introduction aux lieux plans et solides, *ibid.*, III, pp. 85-101). Ce mémoire est suivi (*Fermat*, I, pp. 110-117 et III, pp. 102-118) d'un autre, particulièrement important : *Ad locos ad superficiem Isagoge*. Cf. J. ITARD, *Pierre Fermat*, Bâle, 1950, pp. 5-7. Signalons également la restitution des lieux plans par Fr. VAN SCHOOTEN, in *Exercitationes mathematicae Libri V*, Leyde, 1656-1657 (liv. III, pp. 191-292) et celle, très postérieure, de R. SIMSON, *Apollonii Pergaei locorum planorum libri II restituto a Roberto Simson*, Glasgow, 1749.

évoque des questions que Pascal lui a récemment proposées par l'intermédiaire de Carcavy :

Pour le lieu du problème, duquel il dit que dépendent tous les lieux plans proposés par lui (1), je n'ai pas voulu manquer de le chercher, et aussitôt j'ai trouvé que c'était un certain cercle en la manière ci-dessous : soit donnée la ligne droite AB coupée *utcumque* en C et qu'il faille trouver le lieu sur lequel étant pris le point D et étant tirées les lignes DA, DB et les parallèles CE, CF, les rectangles ADE, BDF, pris ensemble soient égaux au quarré de la ligne donnée Z.

Qu'on décrive sur la ligne AB le demi-cercle AGB et qu'après, élevant la perpendiculaire CG, on tire la ligne GH égale à la ligne Z et terminée à la ligne AB allongée s'il le faut. Je dis que, si du centre C, avec la distance CH on décrit le cercle HD, il sera le lieu qu'on cherche (2).

Ce problème auquel Pascal semble donc avoir voulu ramener tous les lieux plans qu'il avait étudiés est un cas particulier du lieu classique des points M du plan dont les distances à deux points fixes A et B satisfont à une relation du type $a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 = \mathrm{Cte}$ (a et b étant des nombres donnés).

Nous ne possédons aucune indication, ni sur la méthode utilisée par Pascal pour traiter ce problème, ni sur celle que Fermat signale avoir étendu à un autre cas particulier, d'ailleurs assez voisin (3). De toute façon, les connaissances de l'époque permettaient à des géomètres exercés de résoudre aisément de tels problèmes. En effet l'un des lieux plans étudiés par Apollonius et cités par Pappus correspond au problème général envisagé (4) ; un lemme de Pappus s'y rapporte également (5).

Nous avons signalé que, sous l'influence de Pappus, les mathématiciens de la première partie du XVIIe siècle marquaient une distinction très nette entre lieux plans, lieux solides et lieux de lignes (ou lieux à la surface, ou encore sursolides). Rappelons tou-

(1) Fermat apporte ainsi une précision complémentaire sur la manière dont Pascal avait entrepris de restituer les lieux plans. Sa méthode « absolument nouvelle » qui abordait ces problèmes par une voie « beaucoup plus courte », était donc fondée sur le recours à un lieu particulier dont dépendaient les autres.

(2) Fermat à Carcavy, 1656 (*Fermat*, II, pp. 318-319).

(3) Peut-être la solution de FERMAT était-elle proche de celle qu'il avait précédemment donnée dans sa *Restitution des deux livres des lieux plans d'Apollonius de Perge* (*Fermat*, I, pp. 3-51 ; *ibid.*, III, pp. 3-48).

(4) « Si des droites menées de deux points donnés se brisent et si le carré de l'une est à l'égard du carré de l'autre plus grand d'une aire donnée qu'en raison, le point est lié à une circonférence donnée de position » (*Pappus*, II, p. 499). Voir *in* R. SIMSON, *op. cit.*, pp. 136-144), un essai de restitution de cette proposition.

(5) *Pappus*, II, pp. 660-662 : prop. 121.

tefois qu'à l'exemple de Fermat, qui semble n'adopter cette distinction que pour se plier à l'usage courant (1), Pascal ne paraît pas lui accorder une importance fondamentale. L'exemple des problèmes de contacts circulaires et de contacts sphériques nous a montré que, dans une « solution plane », il admettait un raisonnement fondé sur les propriétés des coniques (lieux solides), à condition que la construction finale ne fasse intervenir que des droites et des cercles, et soit de ce fait réalisable à la règle et au compas.

3. *Perspective et gnomonique*

Deux autres sujets de recherches géométriques de Pascal, mentionnés dans l' « Adresse » de 1654 (G et H), ne sont pas cités par Leibniz : sa « méthode de perspective », et ses recherches sur le gnomon.

L'intérêt que Pascal a porté à la perspective s'explique tout naturellement, sa méthode d'étude des coniques reposant sur l'emploi de cette transformation à laquelle Desargues avait consacré d'importants travaux (2). Les seules indications que nous possédions à ce sujet sont contenues dans le bref paragraphe de l' « Adresse » où Pascal assure que cette méthode « fournissant les points du dessin par l'intersection de deux droites seulement » ne peut être surpassée par aucune autre en rapidité et commodité. Il est de fait impossible de reconstituer sa méthode de construction à partir de données aussi vagues ; on peut toutefois penser que, tout comme certains procédés modernes, la méthode pascalienne faisait appel à la transformation homologique qui lie la perspective d'une figure plane donnée à son rabattement sur le plan du tableau. De toute façon, ces recherches confirment la grande influence exercée sur Pascal par Girard Desargues, qui fut l'un des principaux rénovateurs de la technique de la perspective.

Cette influence se manifeste également par la mention, faite par Pascal, de ses recherches sur le gnomon. La technique de la gnomonique, à laquelle Desargues avait consacré l'un de ses

(1) Fermat à Carcavy, 1656 (*Fermat*, II, p. 317) : Parlant d'une question posée par Pascal, Fermat écrit : « ... parce que le problème est plan et craignant le scrupule des géomètres, je l'ai résolu alors par les lieux plans généralement ». Il avoue d'ailleurs préférer la solution analytique.

(2) *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective...*, Paris, 1636 (réédité in *Poudra*, I, pp. 55-84). Voir également A. Bosse, *Maniere universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective...*, 2 vol., Paris, 1648-1653.

essais (1), a en effet des fondements théoriques liés à l'étude projective des coniques.

Il faut d'ailleurs noter que dans son *Traité des coniques*, Pascal devait faire allusion à diverses applications de la théorie projective de ces courbes : perspective, gnomonique, coupe des pierres, qui avaient été l'objet d'études particulières de Girard Desargues. Cela est démontré par une citation extraite des « Coniques de M. Pascal » et qui, écrite de la main de Leibniz, figure au verso de l'exemplaire de l'*Essay pour les coniques* de Pascal qu'il avait conservé (2). La citation n'est autre que la conclusion du *Brouillon project* de Desargues (3), ce qui montre à la fois la place importante que Pascal accordait à cette œuvre dans son *Traité*, et l'intérêt que Leibniz semblait porter aux applications pratiques de la perspective.

Mons. des Argues finit son *Brouillon projet* par cecy :

Résultats de ce *Brouillon projet* : *en perspective* : des droites sujet d'une quelconque même ordonnance, les apparences au tableau plat sont droites d'une même ordonnance entre elles et celle de l'ordonnance des sujets qui passe à l'œil, laquelle est l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans de l'œil et de chacune de ces droites sujet.

Touchant les monstres de l'heure au Soleil : En quelconque surface plate les droites des heures sont d'une même ordonnance entre elles, et l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans qui donnent la division de ces heures.

Touchant *la coupe des pierres de taille.* En une même face de mur les arestes droites des pierres de taille sont communément d'une même ordonnance entre elles et l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans des joints qui passent à ces arestes
et les divers moyens de pratiquer chacune de ces choses en sont évidens.

CONIQUES
de M. Pascal.

4. *Les lieux solides*

Mentionnant dans l' « Adresse » le traité *De loco solido*, Pascal précise simplement que ces lieux « sont entièrement complets, dans tous les cas et à tous les égards ».

(1) *Maniere universelle de poser le style aux rayons du soleil...*, Paris, 1642 (cf. *Poudra*, I, pp. 387-392). Voir également A. BOSSE, *La maniere universelle de M. Desargues Lyonnois, pour poser l'essieu et placer les heures et autres choses aux cadrans au Soleil*, Paris, 1643.

(2) Bibl. de Hanovre, *Leibniz Handschr.*, Abt. 35, v. 15, 1, f° 11 (verso supérieur gauche) ; *Desargues und Pascal*, p. 197.

(3) Cf. *Desargues*, p. 180. La citation est très exacte, mais les dernières phrases du *Brouillon project* ne sont pas mentionnées.

Ce traité se retrouve également parmi ceux qu'examina Leibniz. Dans sa lettre à Périer, ce dernier signale que ce « VI^e traité » ne porte aucun titre mais que, rédigé de façon à pouvoir être lu indépendamment de l'ouvrage sur les coniques, il donne la solution géométrique du problème à quatre droites de Pappus (1), précédemment étudié par Descartes et Fermat. La solution de Pascal reposait sur différentes définitions et propriétés de l'hexagramme mystique qui se trouvaient rappelées en préambule sous le titre *Definitiones excerptae ex conicis*. Dans une note dont le texte latin et la traduction française sont cités à la suite par P. Costabel (2), Leibniz signalait par ailleurs que, afin d'améliorer la présentation d'ensemble du manuscrit de Pascal, il avait été amené à intervertir certaines feuilles se rapportant aux II^e (hexagramme) traité et au VI^e (lieux solides). Enfin, dans une autre note (3), Leibniz rappelait l'énoncé du problème à 4 droites et confirmait que Pascal le ramenait à son hexagramme et, de ce fait, à l'étude sur le cône.

Un passage d'une lettre adressée par Mersenne à Constantin Huygens, le 17 mars 1648, confirme ces divers points et permet d'établir que le traité *De loco solido* fut rédigé sous sa forme définitive dès le début de 1648, à un moment où Pascal, tout en poursuivant ses travaux sur le vide et sur la machine arithmétique, reprenait activement ses recherches de géométrie pure :

> ... Si votre Archimède (4) vient avec vous, nous lui ferons voir un des plus beaux traités de géométrie qu'il ait jamais vu, qui vient d'être achevé par le jeune Pascal. C'est la solution du lieu de Pappus ad 3 et 4 lineas qu'on prétend ici n'avoir pas été résolu par M. Descartes en toute son étendue (5). Il a fallu des lignes rouges, vertes et noires, etc., pour distinguer la grande multitude des considérations... (6).

La complexité des figures coloriées mentionnées par Mersenne s'explique aisément du fait que l'analyse complète du problème

(1) La mention faite par Leibniz se rapporte évidemment au célèbre « problème à trois et autre droites », dit souvent « problème de Pappus », qui avait été résolu analytiquement par DESCARTES dans sa *Géométrie* (cf. ci-dessous), puis par Fermat, à l'aide de sa propre méthode de géométrie analytique. Par « composition du lieu solide », il entend l'étude des coniques définies par ce problème et leur mise en équation.

(2) Cf. ci-dessous, pp. 257-258, 260-261.

(3) Cf. ci-dessous, pp. 259, 265.

(4) Il s'agit évidemment de Christiaan Huygens.

(5) La solution de Descartes avait été critiquée en 1637 et 1638, spécialement par Beaugrand et par Roberval, qui y relevèrent certaines lacunes. Cf. ci-dessous, p. 229.

(6) Mersenne à Constantin Huygens, 17 mars 1648 (*Huygens*, I, pp. 83-84).

de Pappus équivaut à la distinction précise des différents types de coniques. La phrase de la lettre de Leibniz, « Les grandes figures colorées appartiennent à ce VI[e] traité », semble prouver que ces figures sont bien celles que mentionnait Mersenne (1).

Quelques précisions sur la question des lieux solides et sur le problème de Pappus permettront, sinon de restituer le traité de Pascal, du moins de le replacer dans son contexte historique et d'en situer l'intérêt et l'originalité.

Il est utile tout d'abord de préciser la nature de ces deux problèmes à l'époque de Pascal. On sait que le traité des *Coniques* d'Apollonius rassemblait presque tout l'apport de l'Antiquité sur la théorie des lieux solides, c'est-à-dire sur les lieux formés de coniques. C'est dans la notice consacrée par Pappus, dans sa *Collection mathématique*, au traité d'Apollonius (2) que se trouve mentionné pour la première fois le célèbre « problème à trois ou quatre lignes » (3), que Fermat et Roberval désignent fréquemment par l'expression de « lieux solides », adoptée ici par Pascal, mais que Descartes, à qui l'on doit essentiellement sa vogue, dénomme question, proposition ou « problème de Pappus » (4).

Ce problème à quatre droites peut s'énoncer ainsi, sous sa forme la plus générale :

Étant données 4 droites du plan, D_1, D_2, D_3 et D_4, trouver le lieu des points M du plan tels que, δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 étant les longueurs des segments menés de M respectivement aux droites D_1, D_2, D_3 et D_4 sous des angles donnés α_1, α_2, α_3 et α_4, on ait $\delta_1 \delta_2 = k\delta_3 \delta_4$.

Si deux des droites données sont confondues, on obtient le lieu à trois droites.

Si nous transposons le problème en notations modernes et si nous l'abordons par la géométrie analytique, il apparaît immédiatement que les distances δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 s'exprimant sous forme de fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 des coordonnées x et y de M, l'équation du lieu est $f_1 f_2 - kf_3 f_4 = 0$,

(1) Cf. *Desargues und Pascal*, p. 194 ; *Briefwechsel*, p. 135.

(2) *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*, éd. F. Commandino, Pise, 1588, f° 164 v°-165 r° ; *Pappi Alexandrini Collectiones*, éd. F. Hultsch, Berlin, 1876-1878, v. II, pp. 637, 677 ; *Pappus*, I, pp. XCIII-XCIV ; *ibid.*, II, pp. 507-510.

(3) Pappus signale que les lieux à trois et quatre lignes, traités très incomplètement par Euclide, ont été plus approfondis par Apollonius (liv. III des *Coniques*). Il mentionne également les lieux à « plus de quatre droites », et spécialement le lieu à 5 droites que Descartes traitera le premier, grâce à sa géométrie analytique.

(4) Sur l'histoire du problème de Pappus, voir en particulier les études de P. TANNERY (A.T., IV, pp. 364-366 ; VI, pp. 722-725).

équation du second degré qui correspond à une conique. On démontre inversement que, par un choix convenable des données, toute conique peut être définie ainsi d'une infinité de façons.

L'étude et la discussion du problème de Pappus équivalent donc à l'étude de toutes les coniques du plan. On conçoit de ce fait comment ce problème a pu servir à Descartes comme exemple-type, destiné à la fois à démontrer la puissance de sa nouvelle « géométrie » et à déterminer analytiquement les différents types de coniques. Rappelons d'ailleurs que Descartes aborde la généralisation au cas de $2n$ et de $2n - 1$ droites et qu'il détaille tout particulièrement le cas du lieu à 5 droites (1).

Dès 1596, Viète avait abordé certains aspects du problème à 3 et 4 droites (2), mais ce n'est qu'en 1632 que la question devient véritablement d'actualité. En janvier 1632, Descartes adresse à Golius quelques informations sur le problème à n lignes et émet à son sujet certaines idées qui se trouveront précisées et développées dans sa *Géométrie* de 1637 (3). Le 5 avril, il rappelle à Mersenne qu'il lui a précédemment envoyé « la question de Pappus » et lui demande de la proposer à Beaugrand ; à cette occasion, il signale, fait assez rare, les difficultés qu'il a rencontrées dans la résolution de cette question :

Vous m'avez écrit la dernière fois de quelqu'un qui se vantait de résoudre toutes sortes de questions mathématiques. Je serai bien aise de savoir si vous lui avez proposé la question de Pappus que je vous avais envoyée, car je vous dirai que j'ai employé cinq ou six semaines à en trouver la solution, et que si quelqu'un la trouve, je ne croirai pas qu'il soit ignorant en algèbre (4).

En mai et juin 1632, il revient à la charge en demandant à Mersenne de soumettre ce problème à d'autres mathématiciens, dont Mydorge (5). Probablement la question fut-elle alors transmise

(1) *Géométrie*, 1637, pp. 335-339 ; A.T., VI, pp. 407-411.

(2) A la suite du *Pseudomesolabum et alia quaedam adjunda capitula*, Paris, 1596.

(3) Descartes à Golius, janv. 1632 (A.T., I, pp. 232-236 ; *Corr. Descartes*, I, pp. 212-213). Il semble que Descartes a précédemment envoyé à Golius la solution du problème à 3 et 4 droites. Cette lettre montre que, dès cette époque, l'étude du problème général de Pappus l'avait conduit à sa classification des courbes algébriques en genres.

(4) Descartes à Mersenne, 5 avril 1632 (A.T., I, p. 253 ; *Corr. Descartes*, I, p. 221 ; *Mersenne*, III, pp. 261-262). Ce passage semble montrer que Descartes avait déjà adressé depuis quelque temps ce problème à Mersenne, à l'intention des mathématiciens parisiens. C. DE WAARD (*Mersenne*, III, 261-262) pense qu'il est déjà question de ce problème dans une lettre de Beaugrand à Mersenne du 20 février 1632 (*Mersenne*, III, pp. 254-256).

(5) Descartes à Mersenne, 3 mai 1632 (A.T., I, p. 244 ; *Corr. Descartes*, I, p. 222 ; *Mersenne*, III, p. 292). Contestant la valeur d'une solution du problème de Pappus qui lui

à Fermat qui, dans une lettre du 20 avril 1637 (1), signale qu'il a trouvé depuis plusieurs années la démonstration du lieu à quatre droites. Quant à Roberval, s'il semble avoir dès ce moment abordé le problème de Pappus, à son propre témoignage et à celui de Carcavy, c'est vers 1637 qu'il donnera une solution complète du problème à quatre droites (2).

C'est d'ailleurs en 1637 que l'intérêt porté à ce problème rebondit, avec la publication de la *Géométrie* de Descartes, où sa solution, longuement développée, sert de base à la présentation de la nouvelle géométrie analytique (3). Probablement, cette solution est-elle une version améliorée de celle qui avait été élaborée à la fin de 1631 et dont la complexité avait certainement été l'un des principaux motifs ayant poussé Descartes à la mise au point de la géométrie analytique. Toujours est-il que la *Géométrie* fut l'objet d'un examen critique très attentif des mathématiciens parisiens que Descartes malmenait fréquemment dans sa correspondance avec Mersenne. Beaugrand et Roberval, en particulier, s'élevèrent contre certaines lacunes de la solution cartésienne (4) et, sans quitter pour autant sa morgue quelque peu dédaigneuse,

a été transmise par Mersenne, Descartes ajoute : « Car il faut bien aller au-delà des sections coniques et des lieux solides pour le résoudre en tout nombre de lignes données, ainsi que... je pense l'avoir résolu. »

Descartes à Mersenne, juin 1632 (A.T., I, p. 256 ; *Corr. Descartes*, I, pp. 230-231 ; *Mersenne*, III, p. 317). DESCARTES, contestant que Mydorge ait résolu « la proposition de Pappus » dans son *Traité des coniques*, signale que ce problème a été autrefois proposé directement à Mydorge par Golius.

(1) Fermat à Roberval, 20 avril 1637 (*Fermat*, II, pp. 105). L'élégante solution du problème à trois droites, que Fermat conçut à la manière des anciens géomètres, semble remonter environ à 1632, date à laquelle Descartes soumit ce problème au P. Mersenne (Loci ad tres lineas demonstratio, *Fermat*, I, pp. 87-89 ; trad. fr. : Démonstration du lieu à 3 droites, *Fermat*, III, pp. 83-84).

(2) Si la lettre de Beaugrand à Mersenne du 20 févr. 1632 (*Mersenne*, III, pp. 254-256) porte bien sur le problème de Pappus, elle montre que, dès cette époque, Roberval s'était intéressé à ce problème qu'il savait être « solide », alors que Beaugrand le croyait plan. En fait ce n'est que vers 1637 que Roberval en a rédigé une solution complète. En effet, dans une lettre à Fermat du 4 août 1640 (*Fermat*, II, 201), il lui assure avoir résolu le problème à 3 et 4 droites « depuis plus de trois ans, quoique, continue-t-il, pour n'y rien oublier, il ne faille guère moins de discours qu'aux six premiers livres des *Éléments* ». Parlant de Roberval, Carcavy écrit à Descartes le 24 sept. 1649 : « Il m'en a fait voir la démonstration, ainsi que je vous l'ai dit, il y a très longtemps, et même la publia dès l'année 1637, en l'Assemblée de quelques Messieurs qui conféraient des Mathématiques » (A.T., V, pp. 415, 423-424).

(3) *Géométrie*, 1637, pp. 304-314, 323-335 ; A.T., VI, pp. 377-387, 396-407.

(4) Sur les critiques de Roberval et sur les factums rédigés dès 1637 par Beaugrand contre Descartes, cf. *Mersenne*, VI, p. 345 ; *ibid.*, VII, pp. 120-122, 140-141 ; P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, VI, pp. 203-228).

Descartes dut admettre avoir délaissé le cas particulier où, dans l'équation générale du second degré à deux variables x et y, le seul terme du second degré est celui en xy, les coefficients des termes en x^2 et en y^2 étant nuls (1). Probablement est-ce à ces lacunes que Mersenne fait allusion dans sa lettre à Constantin Huygens ; les réserves qu'il mentionne à l'égard de la solution cartésienne semblent bien être celles qu'émettait Roberval, éternel critique et adversaire de Descartes.

Bien que différentes dans la forme, les diverses solutions du problème de Pappus présentées par Descartes, Fermat et Roberval, étaient proches dans leur esprit, puisqu'elles équivalaient à une étude analytique de tous les types de coniques du plan par l'intermédiaire de cette définition particulière. Ces solutions étaient nécessairement très compliquées, car elles devaient examiner attentivement tous les différents cas, par des méthodes souvent quelque peu artificielles et en utilisant des notations peu commodes.

La solution de Pascal est d'esprit tout différent puisque, au témoignage de Leibniz, elle ramène le problème de Pappus à la définition générale d'une conique à partir du théorème de l'hexagone. Nous ignorons la méthode suivie, mais le but en est clair : établir l'équivalence des deux modes de définition des coniques, distinguer à partir des données les différents types de coniques obtenus et déterminer des éléments permettant de construire effectivement ces courbes. Il est certain que cette discussion présente des aspects assez complexes et l'on comprend aisément que Pascal ait dû recourir à de grandes figures coloriées. Mais le point essentiel à retenir est que Pascal a su lier étroitement la solution de ce problème à sa méthode d'étude projective des coniques. De ce fait, ce célèbre problème de Pappus qui avait servi d'arme principale à Descartes pour prouver l'excellence de sa géométrie analytique, s'est révélé parfaitement accessible aux méthodes géométriques, du moins présentées sous leur forme projective nouvelle. Il s'agissait en somme d'une démonstration éclatante de la puissance et de la fécondité de cette nouvelle géométrie, démonstration d'autant plus probante qu'elle était faite sur le terrain même choisi par l'adversaire. Malheureusement, aucune trace ne nous a

(1) Descartes reconnut, quelque peu à contrecœur, avoir laissé quelques lacunes dans son étude. Cf. Descartes à Debeaune, 20 févr. 1639 (A.T., II, pp. 510-512 ; *Corr. Descartes*, III, pp. 184-185).

été conservée de ce traité *De loco solido* qui, sans nul doute, fut l'une des plus brillantes réussites de Pascal dans le domaine de la géométrie projective.

5. *Les contacts coniques*

En dehors de ces lieux solides et de l'œuvre générale des coniques que nous examinerons ultérieurement, un autre traité se trouve mentionné à la fois dans l' « Adresse » de 1654 et dans la Lettre de Leibniz de 1676 : sous le nom de *Traité des contacts coniques (Tactiones etiam conicae* ou *De tactionibus conicis).* En fait, il s'agit des six problèmes classiques de construction de coniques devant passer par n points ($n \leqslant 5$) et être tangentes à $5 - n$ droites données. Bien qu'aucune indication ne demeure sur la méthode adoptée par Pascal, il semble que le « théorème de l'hexagone » y ait tenu une place centrale. La résolution du cas des 5 points s'en déduit en effet immédiatement ; les cas particuliers du théorème de Pascal où certains côtés de l'hexagone sont réduits à un point, permettent ensuite d'aborder les cas de 4 points et une droite et de 3 points et 2 droites. Enfin, le fait que dans le « III^e^ traité » mentionné dans la « Lettre à Périer », Pascal semble avoir examiné attentivement les propriétés d'un quadrilatère circonscrit à une conique, peut laisser supposer qu'il aurait mis en lumière le théorème corrélatif de celui de l'hexagone inscrit, théorème connu sous le nom de Brianchon (1) et qui affirme que les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique sont concourantes. Dans ce cas, la résolution des trois derniers problèmes de « contacts coniques » eût été immédiate. Mais ce n'est là qu'une hypothèse. Celle-ci est toutefois étayée assez solidement par un passage inédit du brouillon de la « Lettre à Périer » que nous avons précédemment cité (2).

Il nous reste à signaler deux extraits de correspondances qui montrent que les problèmes de « contacts coniques » avaient été proposés par Pascal à Fermat, en 1656 au plus tard, et à Sluse, en 1657.

En effet, Fermat, écrivant en 1656 à Carcavi au sujet de Pascal, dit :

Pour ce qui est de l'autre problème de cinq lignes données, je ne sais pas qui lui a dit que je l'estime facile. Je ne crois pas vous avoir écrit une telle chose, parce que je m'aperçus alors qu'on pouvait venir diffi-

(1) BRIANCHON, in *Correspondance sur l'École polytechnique,* t. I, 1804-1808, p. 151 (1805) ; ID., *Journal de l'École polytechnique*, cah. 13 (1806), p. 301.

(2) Voir ci-dessus, p. 213, n. 2.

cilement à l'équation et qu'après qu'on l'avait trouvée, la construction serait beaucoup embrouillée. Vous me ferez la faveur de le dire à M. Pascal et je songerai à cela quand j'aurai plus de loisirs (1).

Quant à Sluse, le 28 octobre 1657, il transmet à Huygens les énoncés suivants qui semblent lui avoir été adressés par Pascal :

Datis quinque rectas AG, BF, CK, DL, EA, invenire conisectionem quae datas quinque rectas contingat. Oppositas autem hyperbolas pro una conisectione accipia. Oportet autem tres ex ipsis non esse inter se parallelas aut ad idem punctum coalescentes (2).

6. *Autres problèmes d'applications*

Nous mentionnerons encore les derniers problèmes d'application signalés par Leibniz dans la « Lettre à Périer ».

Leibniz cite tout d'abord un fragment intitulé *De restitutione coni*, « savoir, les diamètres et paramètres étant donnés, retrouver les sections coniques ». S'il note que ce fragment paraît entier et a ses figures, par contre, Leibniz ne précise ni le nombre, ni la nature exacte des problèmes de construction abordés par Pascal.

La seconde application, intitulée *Magnum problema*, consistait, semble-t-il (3), à mener par un point donné M, non situé sur un cône C, un plan P de telle façon que l'intersection de P avec C soit semblable à une conique donnée. En fait, des plans sécants parallèles déterminant sur C des sections homothétiques, la donnée du point M est accessoire et le problème revient à placer sur un cône donné une conique semblable à une conique donnée.

Il s'agit en somme de la généralisation d'un problème posé par Desargues en 1641 et qui eut alors son heure de célébrité puisqu'il fut résolu plus ou moins complètement par Desargues lui-même, par Roberval, par Mydorge et par Descartes (4) : la détermination des sections circulaires d'un cône ayant pour base une conique quelconque. Nous ne savons rien sur la solution apportée par Pascal à un problème très important qui n'avait pas jusqu'à présent été abordé d'une façon aussi générale (5). On peut toutefois ima-

(1) Fermat à Carcavy, 1656 (*Fermat*, II, p. 318).

(2) Sluse à Huygens, 23 oct. 1657 (*Huygens*, II, pp. 72-73 ; G.E., II, p. 225).

(3) Leibniz n'est pas tout à fait affirmatif à ce sujet.

(4) Cf. G.E., II, p. 226 ; *Desargues*, pp. 42-43 ; A.T., III, pp. 714-717 ; *Corr. Descartes*, IV, pp. 361-370 ; *Aperçu*, pp. 81-82.

(5) Le fait d'énoncer ce problème relève déjà de la conception générale des coniques introduite par Desargues et Pascal. Alors qu'APOLLONIUS (*Coniques*, liv. VII, prop. 30 et 33) se borne à placer une section conique donnée sur un *cône droit* donné, DESARGUES aborde le problème général : placer une conique donnée sur un cylindre ou un *cône ayant*

giner que Pascal résolvait d'abord le « problème de Desargues » : détermination des sections circulaires de C ; il ne lui restait plus alors qu'à déterminer sur un cône à base circulaire des sections semblables à une conique donnée.

Sur les autres problèmes qui figuraient dans les manuscrits consultés par Leibniz (IX), nous n'avons aucun renseignement. Probablement s'agissait-il d'autres problèmes de construction liés aux coniques.

V. — Le traité des coniques

Après avoir analysé différents travaux géométriques de Pascal, ainsi que les diverses applications de sa théorie projective des coniques : lieux solides, contacts coniques, etc., il nous reste à envisager le grand ouvrage sur les coniques annoncé dans l' « Adresse » de 1654 sous le titre de *Conicorum opus completum* et que Leibniz, en 1676, tentera de préparer pour la publication en reclassant le manuscrit qui lui avait été confié (1).

Rappelons d'abord les quelques rares mentions faites du vivant de Pascal sur cette œuvre.

Dans un pamphlet de fin 1642, Desargues annonce qu'il ne donnera l'explication d'une de ses méthodes que lorsque « la démonstration de cette grande proposition nommée la Pascale verra le jour. Et que ledit Pascal peut dire, que les quatre premiers Livres d'Apollonius sont ou bien un cas, ou bien une conséquence immédiate de cette grande proposition »... (2). Ce vibrant témoignage de l'auteur du *Brouillon project* montre qu'il reconnaît la pleine originalité de Pascal dans la découverte de son grand théorème — qu'il dénomme même « la Pascale » — et qu'il sait que son auteur a déjà pu en déduire la plupart des propriétés des coniques qui étaient alors connues.

Ce fait est confirmé en 1644 par Mersenne qui assure que Pascal a tiré de sa proposition universelle 400 corollaires qui renferment l'essentiel des *Coniques* d'Apollonius (3).

pour base une conique donnée, dans son *Brouillon project* : « Comme entre autres que sur la quelconque de ces coupes de rouleau peut être construit un rouleau qui sera coupé selon quelconque espèce de coupe donnée » (*Desargues*, pp. 159-160).

(1) Cf. Lettre de Leibniz à Périer, 30 août 1676 (ci-dessus, p. 213).

(2) In *Response à cause & moyens d'opposition, &c.*, 16 déc. 1642. Ce pamphlet est perdu, mais le texte de cette citation est donné par J. Curabelle (*Examen des œuvres du S*[r] *Desargues*, Paris, 1644, pp. 70-71 ; BN : Z 10291).

(3) « Unica propositione universalissima, 400 corollariis armata, integram Apollonium complexus est » (M. Mersenne, *Cogitata physico-mathematica*, Paris, 1644, Préface).

Il ne semble pas toutefois que Pascal eût alors terminé la rédaction de son grand *Traité des coniques*. Peut-être même cette rédaction n'était-elle pas encore terminée en 1654 lorsque, parlant à Fermat de ses travaux sur les probabilités, il écrivait : « Je mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps (1). »

Peut-être y reviendra-t-il au cours des années suivantes ; divers passages de sa correspondance et certains témoignages indirects semblent montrer, en effet, la persistance d'un intérêt pour les questions géométriques. Mais il ne travaillera plus sur ces questions après 1658, époque où il se passionnera pour ses recherches sur la roulette avant d'abandonner définitivement les études de mathématiques au début de 1659.

Après la mort de Pascal, en 1662, ses héritiers paraissent s'être désintéressés de cette partie de son œuvre. La publication, en 1670, de critiques dirigées contre l'œuvre de Desargues et de Pascal en géométrie projective (2) attira l'attention vigilante du secrétaire de la *Royal Society*, Henry Oldenburg, toujours à l'affût de renseignements sur les découvertes faites par les savants français. Le 6 avril 1673, Oldenburg signala à Leibniz l'existence d'un traité inédit de Pascal sur les sections coniques (3). Leibniz se mit alors à la recherche de ces documents. En 1675, il put consulter une première série de travaux géométriques de Pascal, comportant, semble-t-il, le traité géométrique inachevé destiné aux écoles de Port-Royal (4). Après avoir restitué ces manuscrits, Leibniz put enfin consulter, avec Tschirnhaus, le manuscrit du *Traité des coniques*. La lettre qu'il écrivit à Étienne Périer en lui renvoyant cet écrit constitue, avec quelques notes prises par Leibniz et Tschirnhaus, les seuls éléments qui nous restent sur cette œuvre si importante. En effet, comme nous le verrons, bien que Leibniz ait conseillé la publication de ce *Traité*, les héritiers de Pascal n'en firent rien et égarèrent son manuscrit ; du moins, celui-ci ne nous est-il pas parvenu.

Dans l'attente d'une redécouverte, très improbable, de ce texte précieux ou de la mise en lumière de documents inédits — telle

(1) Pascal à Fermat, 29 juillet 1654 (*Bossut*, IV, p. 420 ; G.E., III, p. 380 ; Pl., p. 81 ; *Fermat*, II, p. 296.

(2) G. Huret, *Optique de portraiture et de peinture en deux parties...*, Paris, 1670, pp. 157-158.

(3) *Briefwechsel*, p. 87.

(4) Cf. ci-dessus, p. 198, n. 1.

une lettre, signalée par C. I. Gerhardt (1), où Tschirnhaus aurait donné à Oldenburg une analyse détaillée de ce *Traité des coniques* — nous ne disposons, pour restituer le contenu de cet ouvrage, que des indications brèves et souvent quelque peu énigmatiques, laissées par Leibniz et Tschirnhaus. Aussi notre étude posera-t-elle plus de questions qu'elle n'apportera de réponses.

Les applications et les problèmes annexes ayant été étudiés précédemment, notre analyse ne portera que sur les quatre premiers traités mentionnés par Leibniz dans sa « Lettre à Périer ». Cette limitation s'accorde d'ailleurs aussi bien avec le point de vue adopté par Pascal dans l' « Adresse », qu'avec celui développé par Leibniz qui distingue nettement les « Éléments » de leurs « Applications ».

1. *Génération des sections coniques*

Le *Traité des sections coniques* de Pascal débutait par une pièce « dont l'inscription, écrit Leibniz, est : *Generatio conisectionum tangentium et secantium, seu projectio peripheriae, tangentium, et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus.* Car, ajoute-t-il, c'est le fondement de tout le reste. Les figures y sont [sur deux papiers détachés] insérées » (2).

Notre analyse sera facilitée ici — et dans ce seul cas, malheureusement — par le fait que Leibniz a conservé de ce texte une copie que C. I. Gerhardt a retrouvée parmi les manuscrits de Hanovre (3). Publié en 1892 par Gerhardt (4), ce texte figure depuis lors dans les diverses éditions des *Œuvres complètes de Pascal* (5) et a été traduit en français en 1954 par Cl. Chabauty (6). Il ne semble pas toutefois que l'importance de ce fragment de l'œuvre géométrique de Pascal ait été clairement mise en lumière (7). Il s'agit pourtant d'un texte capital, d'autant plus précieux qu'avec l'*Essay pour les coniques*, il constitue tout ce qui nous reste de cette

(1) *Desargues und Pascal*, p. 195, n. 1.

(2) La première note traduite par P. Costabel (ci-dessous, pp. 257-58, 260-61) donne des détails plus précis sur la disposition des figures.

(3) Leibniz Handschr. Abt 35, vol. XV, 1, f^{os} 4-9 (texte transcrit par un copiste) ; Rivaud, *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz*, 2^e cah., Poitiers, 1914-1924, n° 1499.

(4) *Desargues und Pascal*, pp. 197-202 ; *Briefwechsel*, pp. 135-140. On doit regretter qu'en rééditant ce texte, Gerhardt en ait supprimé les sous-titres, omission qui a été répétée par les éditeurs suivants de Pascal. Ces sous-titres existent sur la copie.

(5) G.E., II, pp. 234-243 ; PL., pp. 66-70.

(6) PL., pp. 1382-1387.

(7) Gerhardt se livre en effet à des commentaires de pure forme, tandis que P. Boutroux (*in* G.E.) se borne pratiquement à signaler quelques emprunts littéraux à Desargues.

œuvre. La richesse de son contenu, son inspiration profondément projective et son élégance en font un document d'une incontestable valeur pour l'appréciation de la pensée géométrique pascalienne. Alors que le *Brouillon project* de Desargues et l'*Essay* publié par Pascal en 1640 semblaient vouloir dissimuler la pensée projective spatiale sous un déguisement plan, ici celle-ci éclate avec une vigueur qui ne se retrouvera que dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet, en 1822.

En voici une analyse détaillée :

I. — La *Generatio* débute par la définition d'une surface conique (à base circulaire) que complètent quelques définitions annexes : cône, base du cône, sommet, demi-surface conique, génératrice.

Puis viennent quatre corollaires :

1) Toute droite joignant le sommet à un point quelconque d'une surface conique est « tout entière sur la surface conique, c'est-à-dire est une génératrice » ;

2) Soit une droite D qui joint deux points d'une surface conique :

a) Si D passe par le sommet, c'est une génératrice ;

b) Sinon, elle n'a aucun autre point commun avec cette surface et est située en partie à son intérieur, en partie à son extérieur ;

3) Il ne peut y avoir trois génératrices dans un même plan ;

4) Tout plan P coupe nécessairement la surface conique, car, de trois génératrices, il en est au moins une qui le coupe. Cette intersection sera nommée section de cône ou conique.

II. — Vient ensuite un scholie qui définit et distingue les six types de sections de cône :

1° Si le plan sécant P passe par le sommet S, trois cas se présentent :

a) Section réduite à un seul *point* : S ;

b) *Droite* (double), si P est tangent à S le long de cette génératrice ;

c) *Angle rectiligne* formé par un système de deux génératrices, si P eoupe le cône ;

2° Si le plan ne passe par S, trois autres cas se présentent :

a) Si P n'est parallèle à aucune génératrice : *antobole* (ellipse), courbe qui « revient sur elle-même » (1) ;

b) Si P est parallèle à une seule des génératrices : *parabole* ;

c) Si P est parallèle à deux des génératrices : *hyperbole.*

III. — Après ce scholie, viennent cinq nouvelles définitions :

a) Droite se dirigeant vers un point, ou vers un point à distance infinie sur une autre droite ;

b) Deux droites quelconques d'un plan sont dites concourir, soit à distance finie, soit à distance infinie ;

(1) Certains auteurs préfèrent écrire autobole (cf. *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. III, 17, p. 43, n. 96). Sur la copie de Hanovre, la graphie « antobole » semble indiscutable.

c) Monosécante : droite du plan de la conique qui ne coupe celle-ci qu'en un point ;

d) Asymptote : droite du plan d'une conique qui n'atteint pas celle-ci, sinon à distance infinie, et qui est parallèle à certaines monosécantes ;

e) ? : Droite du plan d'un cercle qui touche ou rencontre sa circonférence.

IV. — *Les images des points de la circonférence* (1) :

Pascal énonce ensuite une série de corollaires qui introduisent un point de vue projectif, et qui, par une définition perspective ponctuelle, permettent d'énoncer des propriétés générales des trois types généraux de coniques :

1) Toute section conique Γ est la perspective du cercle de base C sur le plan sécant P ;

2) Si P ne passe par S et n'est parallèle à aucune génératrice, c'est-à-dire à aucun rayon, la section qui est une antobole a tous ses points à distance finie.

Scholie. — L'antobole revient sur elle-même et entoure un espace fini ;

3) Si P est parallèle à une seule des génératrices, la section est une parabole ; tous les points de C ont leur image à distance finie, sauf un « qui n'a pas d'image, si ce n'est à distance infinie ».

Scholie. — La parabole s'étend à l'infini et engendre un espace infini, bien qu'elle soit l'image d'un cercle qui est fini et entoure un espace fini ;

4) Si P est parallèle à deux des génératrices, tout point de C a une image « à distance finie, excepté deux points dont les images, à cause du parallélisme, ne se retrouvent nulle part, si ce n'est à distance infinie » : points sans image du cercle et points manquants de l'hyperbole.

Scholies. — 1. La section obtenue (hyperbole) s'étend à l'infini et se compose de deux parties (demi-hyperboles) dont chacune engendre un espace infini, et est l'image d'une partie de la circonférence ; les deux points qui séparent ces deux arcs sur C ont leur image à distance infinie ;

2. Il y a deux points manquants sur l'hyperbole, un sur la parabole, aucun sur l'antobole.

V. — *Images des sécantes* (2).

Trois corollaires portent ensuite sur la perspective des droites sécantes au cercle de base C :

1) Dans le cas de l'antobole, toute sécante D à C a pour image une sécante Δ à Γ ;

2) Dans le cas de la parabole, toute sécante D à C a son image Δ dans P :

a) Si D n'atteint pas le point sans image, Δ est sécante à Γ ;

b) Si D passe par le point sans image, Δ sera parallèle à un rayon et coupera Γ en un seul point ;

3) Dans le cas de l'hyperbole, toute sécante à C qui ne passe par aucun des deux points sans image a pour image une droite Δ sécante à Γ ;

(1) Nous rétablissons le titre marginal porté dans la copie de LEIBNIZ (*Desargues und Pascal*, p. 199) : « Coroll. de apparentiis punctorum peripheriae », supprimé dans les éditions ultérieures.

(2) De apparentiis secantium (*Desargues und Pascal*, p. 200).

b) Si A atteint l'un des points sans image, Δ coupe l'hyperbole en un seul point : c'est une monosécante ;

c) Si D joint les deux points sans image « l'image de cette droite ne sera pas dans le plan de la section conique, si ce n'est à distance infinie ».

VI. — *Images des tangentes* (1).

Pascal passe alors à l'étude des perspectives des tangentes à C. A cette fin, il énonce trois corollaires, complétés par plusieurs scholies :

1) Dans le cas de l'antobole, toute tangente à C a pour image une tangente à Γ en un point à distance finie ;

2) Dans le cas de la parabole, toute tangente à C en un point M distinct du point sans image, a pour image la tangente à Γ au point à distance finie image de M.

Scholie. — « Il y a donc sur la parabole une droite manquante qui joue vraiment le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente » ;

3) Dans le cas de l'hyperbole, toute tangente D à C a son image sur P. Si le point de contact de cette droite est distinct d'un point sans image, l'image de D est tangente à Γ en un point à distance finie ; les images des tangentes aux points sans image n'atteignent pas l'hyperbole, si ce n'est à distance infinie, et sont parallèles à l'un ou l'autre des rayons.

Scholies. — 1. « Les asymptotes jouent le rôle de tangentes à distance infinie et doivent compter pour telles » ;

2. Il y a, dans le cas de la parabole, une série de monosécantes parallèles ;

3. Il y a, dans le cas de l'hyperbole, deux séries de monosécantes parallèles ; et, dans chaque série, il y a une asymptote ;

4. La parabole est à mi-chemin entre l'antobole et l'hyperbole.

VII. — Un tableau comparatif portant sur les trois types de coniques rassemble, en conclusion, les différentes propriétés précédemment exposées.

***

Si l'on compare d'une manière un peu rapide le contenu positif de ce texte à celui du *Brouillon project* de Desargues, on risque d'émettre un jugement injuste envers Pascal, en contestant l'originalité de sa pensée. En effet, les diverses propriétés projectives des coniques qui s'y trouvent successivement présentées, avant d'être rassemblées en tableau, se rencontrent effectivement dans l'essai de Desargues. De plus, il est certain que les idées projectives qui sont à la base de la *Generatio* sont typiquement arguésiennes. Cependant, un contraste saisissant apparaît entre la discrétion avec laquelle la méthode de projection centrale (perspective ou « méthode optique ») se trouve signalée et utilisée dans le *Brouillon project* et dans l'*Essay pour les coniques* et la manière brillante et élégante avec laquelle Pascal en révèle la puissance dans cette

(1) De apparentiis tangentium (*op. cit.*, p. 201).

introduction à son grand *Traité des coniques*. La concision même du texte ajoute à sa force. Il semble que Pascal ait voulu dès l'abord frapper l'imagination par une révélation brutale, sans préambule justificatif. Ces quelques pages montrent en effet que cette méthode nouvelle permet à la fois de considérer une section plane quelconque du cône, en abandonnant les sections par l'axe « à la mode d'Apollonius », d'appliquer les mêmes raisonnements aux différents types de coniques et, en assimilant les éléments à l'infini aux éléments ordinaires, de présenter sous une forme beaucoup plus simple de nombreuses questions, telles que celles portant sur les asymptotes ou sur les diamètres. Ce vaste programme qui apparaît si clairement dans ce texte est celui de la géométrie projective, tel que Poncelet le définira dans la préface de son *Traité des propriétés projectives* (1). S'il avait été publié, en 1676, comme Leibniz le souhaitait, on ne peut douter qu'il eût alors suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens, entraîné un fécond mouvement d'idées et permis ainsi à la géométrie projective de se développer un siècle plus tôt.

Tel qu'il nous est parvenu, malencontreusement séparé des chapitres qui en constituaient l'application, ce bref exposé de la méthode projective d'étude des coniques doit être considéré comme l'un des plus beaux textes géométriques du XVIIe siècle. Aussi, mériterait-il d'être sorti de l'oubli presque total où il est demeuré jusqu'à présent.

Il nous reste à tenter de situer le rôle joué par la méthode perspective dans le *Traité* pascalien. Dans le détail, cette entreprise se révèle inabordable, car bien peu de précisions apparaissent à ce sujet, soit dans la « Lettre à Périer », soit dans les quelques autres documents en notre possession. Cependant, le fait même que Leibniz place ce texte en tête, en précisant que « c'est là le fondement de tout le reste », montre bien que la méthode projective directe, présentée dans la *Generatio*, se trouvait appliquée en d'autres chapitres. La seule indication que nous ayons à ce sujet se rapporte à la théorie de l' « hexagramme mystique » qui constitue le fond du second traité, et sur laquelle, malheureusement, nous restons très mal informés. Probablement, ainsi que nous le montrerons, cette méthode tenait-elle également une place importante

(1) V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures...*, Paris, 1822 ; 2e éd., 2 vol., Paris, 1865-1866.

dans le III^e traité, particulièrement dans l'étude des pôles et polaires et dans celle, équivalente du point de vue projectif, des centres et des diamètres (1).

2. *L'hexagramme mystique*

La deuxième partie, *De hexagrammo mystico et conico*, semble, au témoignage de Leibniz, tenir dans l'édifice pascalien, une place aussi importante que la *Generatio*. Les différentes propositions présentées dans cette partie paraissent en effet avoir été largement utilisées dans les « traités suivants », du moins le savons-nous explicitement pour les III^e et VI^e traités (2). Ce large emploi de l' « hexagramme » s'explique très simplement ; il permet en effet d'éviter le recours constant à la méthode des projections qui nécessite l'emploi de figures à trois dimensions. Il s'agit en somme d'une transposition plane de la méthode projective, analogue à la théorie de l'involution de Desargues, mais de figuration plus concrète. Probablement cette méthode repose-t-elle sur la proposition fondamentale que Desargues dénommait « la Pascale » dans un texte précédemment cité (3), proposition qui se trouve également mentionnée sans précision par Mersenne en 1644, puis par Pascal dans son « Adresse » de 1654. Mais quelle est exactement cette proposition ?

Cette question de fond n'est qu'une des nombreuses énigmes que pose ce traité *De hexagrammo mystico et conico*. Aussi, avant de l'examiner, nous semble-t-il préférable de situer ces différents problèmes.

Le premier d'entre eux porte sur l'architecture générale de ce chapitre. Cette partie expliquait, suivant Leibniz, « les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de lignes droites et appelée hexagramme mystique ». Par la méthode des projections, Pascal montrait que toute figure de ce type « convient à une surface conique » et qu'inversement « toute (ou toute la) section conique donne un hexagramme mystique ». L'ensemble comprenait des définitions, avec leurs corollaires, et des propositions, avec leurs démonstrations.

Leibniz note que dans le VI^e traité, *De loco solido*, une partie

(1) Cf. ci-dessous, p. 245.

(2) LEIBNIZ écrit en effet, dans sa « Lettre à Périer », au sujet du III^e traité : « C'est là-dedans que l'usage de l'hexagramme paraît ». De même dans une note relative au problème des lieux solides (cf., ci-dessous, p. 266), il écrit : « C'est un problème de Pappus que Pascal ramène facilement à son hexagramme et par ce moyen au cône. »

(3) Cf. p. 233.

de ce traité se trouvait « répétée et insérée mot à mot », avec des figures plus complètes. Il précise que Pascal y expliquait ce qu'il entendait par les mots *hexagrammum conicum et mysticum*. L'une des notes complémentaires de Leibniz (1), révèle que dans sa mise en ordre de l'ensemble du manuscrit pascalien, Leibniz a interverti certains passages et certaines figures des traités II et VI, afin de rassembler dans le IIe traité les textes et les figures les plus complets touchant à la théorie de l'hexagramme, pour ne laisser en tête du traité VI qu'un rappel de cette étude.

Une seconde question se pose dès l'abord au sujet de l'expression « hexagramme mystique » qui, comme Leibniz le précise (2), est introduite par Pascal.

Gerhardt, qui a publié pour la première fois ce texte, en 1892, suggère que cette expression peut avoir été conçue en liaison avec le « pentacle ou pentagramme magique » (3). Mais cette explication reste peu satisfaisante. Il est assez curieux de noter que les éditeurs ultérieurs ne semblent pas s'être préoccupés de l'origine de cette expression, au demeurant assez surprenante dans un texte mathématique (4).

Sans vouloir tenter d'apporter ici une réponse à cette question, du moins voudrions-nous attirer sur elle l'attention aussi bien des pascaliens, que des historiens du langage et des connaisseurs de la littérature ésotérique de la Renaissance et du XVIIe siècle. Du point de vue mathématique, ce qui nous intéresserait plus particulièrement serait d'expliquer pourquoi Pascal a voulu appliquer à la figure qu'il considérait une dénomination aussi curieuse, du moins en apparence (5).

Reste la question fondamentale : qu'est exactement l'hexagramme mystique (et conique). Il est évident tout d'abord, d'après la dénomination elle-même, qu'il ne peut s'agir de la figure définie dans le 1er lemme de l'*Essay pour les coniques* (6). De plus, les quelques notes laissées à ce sujet par Leibniz et Tschirnhaus (7) montrent que l'hexagramme mystique ne peut être identifié à

(1) Cf., ci-dessous, p. 261.

(2) « Hexagramme pascalien. Mystique comme il l'appelle, et qui est toujours conique » (cf., ci-dessous, p. 267).

(3) *Desargues und Pascal*, p. 195, n. 1.

(4) C'est le cas, par exemple, de P. BOUTROUX (G.E., II, pp. 222-225).

(5) Cette expression ne semble pas surprendre Leibniz outre mesure. Il est vrai qu'à cette époque la littérature ésotérique était encore largement répandue, spécialement dans le domaine de la chimie et de la médecine.

(6) Cf. ci-dessus, p. 202. Nous avons vu en effet que l'*Essay* ne définissait qu'indirectement un hexagone inscrit dans une conique.

(7) Voir les notes traduites par P. Costabel (pp. 259-60, 267).

l'hexagone de Pascal, tel qu'il se trouve caractérisé dans les traités modernes de géométrie projective (1). Ces notes révèlent l'importance accordée par Pascal aux notions d'analyse combinatoire. La distinction qu'il fait entre lignes continues (côtés adjacents), lignes couplées (côtés ni adjacents, ni opposés) et lignes opposées (côtés opposés) est significative à cet égard. Malheureusement ces notes sur l'hexagramme se limitent au rappel de définitions, sans signaler l'application que Pascal en faisait. Les deux figures qui accompagnent leur texte suggèrent quelques remarques. Les deux hexagones qui s'y trouvent figurés sont en effet très particuliers : le premier semble posséder un centre de symétrie confondu avec l'intersection des côtés opposés 3 et 6 et avoir ses côtés opposés parallèles ; le second a ses côtés opposés 3 et 6 parallèles. Mais l'absence d'explications ne permet pas d'interpréter plus avant.

Ainsi, les quelques documents relatifs au *Traité* de Pascal ne permettent ni de préciser la nature exacte de la figure qu'il dénommait « hexagramme mystique », ni de restituer les propriétés qu'il énonçait dans le *De Hexagrammo mystico et conico*, avant de les utiliser largement dans la suite de l'ouvrage. Du moins, discerne-t-on les questions qui demeurent à ce sujet (2).

A titre d'hypothèse, nous pensons que, dans ce chapitre de son grand traité, Pascal débordait largement le cadre strict de ce que l'on appelle aujourd'hui le théorème de Pascal, pour envisager également ses divers cas particuliers, ainsi que les propositions corrélatives liées au théorème dit de Brianchon et à ses différents cas particuliers. De plus, les définitions précédemment rappelées sur la distinction combinatoire des différents couples de côtés nous semblent suggérer que Pascal avait décelé le rapport entre son théorème fondamental et le théorème de Desargues sur les triangles perspectifs (3) ; il est facile en effet de vérifier, par exemple,

(1) Cf. *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. III, 17 (*Coniques* par F. DINGELDEY et E. FABRY, pp. 83-94).

(2) Cf. article cité à la note précédente. On y trouve, en même temps qu'un exposé des principales propriétés des hexagones de Pascal et de Brianchon, d'abondantes références sur les nombreux travaux consacrés, surtout au XIX^e siècle, à ces figures. Voir aussi à ce sujet, E. KÖTTER, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie... (*Jahresb. deutsch. Math. Ver.*, t. 5^2 (1898), pp. 14-28). La droite qui joint les points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone de Pascal est appelée aujourd'hui *droite de Pascal*, alors que Pascal la désignait sous le nom de *directrice*. Sur ses propriétés, voir l'article cité de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, spécialement pp. 88-94.

(3) *Desargues*, pp. 206-209. Cette proposition avait été publiée en 1648 dans la *Maniere universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective...* de A. BOSSE.

que les triangles formés par les côtés 1, 2, 3 et 4, 5, 6 d'un hexagone inscrit dans une conique sont perspectifs (1).

De toute façon, le fait que le théorème fondamental lui avait permis de démontrer de nombreuses propriétés des coniques, montre que Pascal avait compris qu'il s'agissait d'une condition générale exprimant qu'un point du plan appartient à la conique définie par cinq points donnés et que, prolongeant l'idée sous-jacente à son *Essay* de 1640, il avait réussi à déduire d'autres formes de cette condition, plus aisément applicables en différentes démonstrations.

3. *Le III^e traité*

Le III^e traité, suivant l'ordre adopté par Leibniz, porte « sur les quatre tangentes (au cercle) (2) et sur les droites qui joignent les points de contact d'où sont déduites les propriétés des droites harmoniquement coupées et des diamètres ».

Leibniz précise que dans ce traité, qu'il considère comme complet, « l'usage de l'hexagone paraît » et que « les propriétés des centres et des diamètres des sections coniques sont expliquées » (3).

En fait, nous pensons, avec Poncelet (4) et Chasles (5), que cette description est beaucoup trop restrictive. Le début du titre montre qu'un rôle fondamental est accordé au théorème suivant : « Lorsqu'un quadrilatère est inscrit à une conique, les tangentes à cette courbe menées par deux sommets opposés se coupent sur la droite qui joint les points d'intersection des côtés opposés. »

Or, cette proposition, cas particulier du « théorème de l'hexagone » qui apparaît lorsque deux des côtés opposés, supposés infiniment petits, sont remplacés par les tangentes correspondantes, permet d'établir aisément toute la théorie des pôles et polaires (6).

(1) Ces rapports ont été précisés par O. Hesse (in *Journal für die reine u. angew. Math.*, t. 41, 1851, pp. 269-271). Voir aussi O. Hesse, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene*, 4^e éd., Leipzig, 1906, pp. 155-182.

(2) La restriction au cas du cercle n'est signalée que dans une des notes de Leibniz. Elle paraît d'ailleurs invraisemblable, le traité de Pascal ayant pour objet une étude unitaire des coniques.

(3) Il revient sur ce dernier point quelques lignes plus loin : « Les propriétés fondamentales des sections coniques qui dépendent de la connaissance du centre et des diamètres ayant été expliquées dans le traité précédent » (III^e traité).

(4) J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives...*, Paris, 1822, p. 101.

(5) *Aperçu*, pp. 71-72.

(6) On pouvait par exemple utiliser les lemmes 154-156 et 161 du livre VII de la *Collection mathématique* qui sont relatifs au cercle, puis étendre par perspective les propriétés obtenues aux différentes coniques.

Cette étude était entièrement rédigée, lorsqu'une confirmation, décisive et inattendue, a été apportée à cette hypothèse grâce à la consultation d'une photocopie de la minute originale de la lettre de Leibniz à Périer. Quelle n'a pas été en effet notre surprise d'y découvrir une phrase non terminée et raturée, mais parfaitement lisible et riche de signification, qui avait été malencontreusement négligée par les différents éditeurs de cette lettre (1). Il s'agit d'une première esquisse de la présentation du « III^e^ traité », beaucoup plus explicite quant à la méthode que le texte définitif. Leibniz y présente en effet d'une façon succincte, mais très claire, le principe de base de ce traité :

« III. Et comme il arrive que quelques-unes de ces six droites qui font l'Hexagramme sont infiniment petites, c'est de là que viennent les proprietez des touchantes du Cone expli (2) ».

Aucune équivoque ne subsiste donc plus sur la méthode que Pascal avait adoptée dans cette étude.

La fin du titre, dans sa version définitive, « d'où sont déduites les propriétés des droites harmoniquement coupées et des diamètres », confirme d'ailleurs que la théorie des pôles et polaires était bien incluse dans ce traité et semble indiquer que les diamètres et les centres des coniques s'y trouvaient définis comme polaires et pôles d'éléments (points et droites) à l'infini.

Pour justifier cette dernière hypothèse, il est utile de rappeler quelles étaient les sources dont disposait Pascal pour l'édification de sa théorie.

Tout d'abord, la théorie des pôles et des polaires par rapport au cercle, ou à une conique quelconque, se trouvait largement développée dans les *Coniques* d'Apollonius (3). La théorie des centres et des diamètres s'y trouvait également établie, mais de façon indépendante (4). La *Collection mathématique* de Pappus contenait aussi de précieuses indications sur ces questions (5).

(1) Cette expérience édifiante montre la nécessité, au cours de telles recherches, de toujours recourir aux sources originales. Ainsi que nous l'avons précédemment indiqué, la copie de Hanovre nous a permis de rectifier d'autres erreurs dans le texte de cette « Lettre à Périer », dont nous nous proposons de donner une édition critique.

(2) Leibniz s'est interrompu brusquement au milieu de ce mot pour passer à sa nouvelle version (celle qui était connue). Mais le sens est évident : « expliquées dans ce III^e^ traité ».

(3) *Les coniques d'Apollonius de Perge*, trad. fr. de P. Ver Eecke, Bruges, 1924 : liv. III, prop. 37 à 40 (pp. 249-255) ; liv. IV, prop. 1 à 23 (pp. 282-298).

(4) Apollonius, *op. cit.*, liv. II.

(5) *Pappus*, liv. VII, prop. 154-158 (pp. 704-707), prop. 161 (pp. 713-714).

Mais ces exposés des géomètres de l'Antiquité se trouvaient considérablement compliqués par l'étude des différents cas de figure relatifs aux divers types de sections coniques et, en particulier, par la distinction faite entre les deux branches de l'hyperbole. La plupart des auteurs de la première partie du XVII^e siècle n'avaient pu se dégager de cette complexité artificielle (1).

Par contre, le *Brouillon project* de Desargues, dont Pascal avait une connaissance profonde, avait donné une brillante esquisse d'une théorie unitaire des pôles et polaires et des centres et diamètres (2). Dans l'exposé de Desargues, les raisonnements portaient à la fois sur tous les types de coniques et, faisant intervenir les notions de point projectif et de droite projective, traitaient simultanément du cas général et du cas particulier où interviennent des éléments à l'infini (3).

Que Pascal ait parfaitement assimilé ce point de vue, est attesté par le texte de la *Generatio conisectionum.* Il apparaît donc certain que ce « III^e traité » comportait un exposé projectif de la théorie des pôles et polaires et des centres et diamètres, fondé sur le cas particulier du « théorème de l'hexagone » où deux des côtés opposés sont remplacés par les tangentes. Compte tenu des résultats nombreux déjà exposés par Desargues, on peut supposer que le *Traité* pascalien présentait la plupart des théorèmes aujourd'hui classiques sur cette question, mais d'une façon beaucoup plus directement accessible que dans le *Brouillon project.* Notons en terminant que l'emploi de l'expression « droites harmoniquement coupées », qui se retrouve dans la *Nouvelle méthode...* de Ph. de La Hire de 1673 (4) peut laisser supposer que l'auteur de cette

(1) Par exemple MYDORGE (*op. cit.*, p. 207, n. 5), Grégoire de SAINT-VINCENT (*Opus geometricum*, Anvers, 1647).

(2) Cf. *Poudra*, I, pp. 164-171, 186-198 ; *Desargues*, pp. 138-142, 152-160.

(3) Citons par exemple les passages suivants :

« D'où suit qu'au plan d'une quelconque coupe de rouleau, toute droite à l'égard de cette coupe est traversale de droites ordonnées à quelque but, dont une diamétrale, autrement diamétraversale, n'est qu'un cas. Et que tout point à l'égard de cette coupe y est le but de quelques droites ordonnées d'une traversale dont le but des diamétrales n'est qu'un cas » (*Desargues*, p. 154).

« On voit que les droites nommées *asymptotes* ou qui ne rencontrent le bord de la figure à aucune distance finie, y tiennent lieu tout ensemble de diamétrales de la figure, et de touchantes à ses bords à distance infinie » (*Desargues*, p. 156).

(4) L'ouvrage de Ph. de LA HIRE, *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques, et cylindriques...* (Paris, 1673) donne le premier exposé moderne de la théorie des pôles et des polaires — du moins, si l'on ne tient pas compte du *Brouillon project* de DESARGUES et du *Traité des coniques* de PASCAL. La Hire dit avoir tiré de Pappus l'expression « harmoniquement coupée ».

œuvre aurait pu connaître le manuscrit du *Traité des coniques* de Pascal, hypothèse sur laquelle nous reviendrons ultérieurement (1).

4. *Le IVe traité*

Mentionnant que le IVe traité qu'il cite était également complet, tant dans son texte que dans ses figures, Leibniz n'en définit pas très clairement l'objet. Il signale simplement que les propriétés fondamentales dépendant du centre et des diamètres — et, ajouterons-nous, la théorie des pôles et des polaires — « étant expliquées dans le traité précédent, il fallait donner quelques belles propriétés universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique ; et, précise-t-il, c'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées ». Leibniz signale avoir complété ce IVe traité par une feuille relative aux diamètres correspondants (2), dont la troisième page traitait de « la somme et de la différence des côtés, ou des foyers ». Dans une autre note, Leibniz écrit que cette dernière feuille portait sur les côtés droits et les centres.

Dans sa tentative de reconstitution du traité pascalien, Chasles (3) se borne à suggérer que cette partie « contenait ce qui a rapport aux segments faits sur des sécantes menées parallèlement à deux droites fixes, et les propriétés des foyers ».

Bien que les renseignements donnés par Leibniz soient peu explicites, on peut supposer que ce IVe traité comportait les nombreuses propriétés segmentaires énoncées par Apollonius, différents théorèmes sur les aires, les diverses propositions d'Apollonius faisant intervenir le paramètre (côté droit) (4), des relations

(1) Voir ci-dessous, pp. 250-251.

(2) Il semble que Pascal ait réservé pour cette partie un certain nombre de problèmes relatifs aux diamètres conjugués.

(3) *Aperçu*, p. 71.

(4) Ces propositions sont d'ailleurs annoncées dans l'*Essay* (cf. p. 203). Il nous faut signaler encore les allusions quelque peu énigmatiques faites par Carcavy à Huygens, en 1656, au sujet d'une généralisation de la notion d'asymptote attribuée à Pascal.

Le 20 mai 1656, après avoir signalé que « Pascal et Desargues ont enchéri sur la pensée d'Apollonius, ne se mettant pas en peine de couper le cône par l'axe, mais partout où on voudra », il conseille de donner à l'étude des coniques un caractère encore plus unitaire. Suggérant de chercher « dans la parabole un point qui corresponde au centre des autres sections », il dit que Pascal a « aussi donné les asymptotes de l'ellipse, du cercle et de la parabole » (Ch. Henry, Pierre de Carcavy..., Rome, 1884 (extr. du *Bull. d. Bibl. e d. Stor. de Sci. mat. e fis.*, t. XVII), p. 15 ; *Huygens*, I, p. 419).

Le 22 juin, il revient sur ce point plus en détail :

« En ce qui concerne Messieurs Pascal et Desargues, ce sont aussi deux personnages merveilleux. Il est vrai que le dernier a un style un peu différent de celui des autres géoéquivalant aux équations des coniques (1), divers cas particuliers du théorème de Carnot (2), et, peut-être aussi, l'étude de l'intersection de deux coniques (3), la résolution des problèmes de construction de coniques définies par certains éléments, ou de détermination d'éléments variés, tels que diamètres conjugués, axes, foyers, etc. (4). Probablement cette partie comportait-elle également, en plus de la définition bifocale des coniques à centre, la définition générale des coniques par foyer et directrice (5). Mais ce ne sont là qu'hypothèses.

***

Toujours est-il que, contrairement aux vues sceptiques de certains auteurs (6), l'ensemble du *Traité des coniques*, que complétaient d'ailleurs plusieurs chapitres d'applications, couvrait la totalité des objectifs que Pascal s'était fixés dans son *Essay* de 1640 (7), rassemblant ainsi, mais sous une forme unitaire et concise, les propriétés accumulées dans les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius. On peut d'ailleurs penser, sans faire preuve

mètres, mais comme il ne les a pas beaucoup lus, que les pensées sont à lui seul et qu'il conçoit les choses plus universellement qu'eux, il faut l'excuser et profiter de ce peu qu'il nous a donné, dont on tirerait beaucoup plus d'avantage s'il était rangé dans un autre ordre. Le premier avait déjà trouvé la solution de votre proposition et me doit donner au premier jour celle de toutes les autres qui sont dans l'extrait de cette lettre de M. de Fermat. C'est lui aussi qui a remarqué les deux lignes qui ont les mêmes propriétés dans le cercle et dans l'ellipse que les asymptotes dans l'hyperbole, dont la construction est toute semblable. Car, soit l'ellipse AEB, dont le diamètre soit ACB, et soit menée la touchante DBE coupée en D et en E, en sorte que le rectangle DBE soit égal au quart de la figure ; ayant mené les lignes CD, CE du centre C, elles auront les mêmes propriétés dans ces deux sections que les asymptotes dans l'hyperbole » (Ch. Henry, *op. cit.*, p. 16 ; *Huygens*, I, pp. 432-433).

(1) Ces propositions fondamentales étaient déjà annoncées dans l'*Essay*. Probablement, se trouvaient-elles complétées ici par différents corollaires (cf. « C'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées », écrit en effet Leibniz dans la « Lettre à Périer »).

(2) Voir les propositions de ce type énoncées dans l'*Essay*, et dont certaines donnent des conditions exprimant que 6 points du plan appartiennent à une même conique.

(3) Ces problèmes étaient traités dans le livre IV des *Coniques* d'Apollonius.

(4) Voir par exemple les problèmes cités à la fin de l'*Essay*.

(5) Cette définition était déjà mentionnée par Pappus (*Pappus*, t. II, liv. VII, prop. 238, pp. 793-794). Les propriétés liées à cette définition pouvaient également figurer dans le traité précédent, chaque directrice étant la polaire du foyer correspondant.

(6) Par exemple J. L. Coolidge (*A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford, 1945, pp. 32-33 ; *The mathematics of great amateurs*, Oxford, 1949, pp. 88-89).

(7) Leibniz insiste sur ce point à deux reprises. Dans sa lettre à Périer : « Je juge que ces cinq traités contiennent entièrement les *Éléments des coniques* et qu'il n'y manque plus rien » (cf. ci-dessus, p. 214, n. 1) ; et dans une autre note : « Pour ce qui est de la fin des *Éléments*, il faut noter que l'auteur a acquitté ce qu'il a promis dans le feuillet imprimé » (cf. ci-dessous, pp. 258, 261).

d'un optimisme trop imprudent, que le traité pascalien allait bien au-delà d'Appollonius et contenait également, présentés sous une forme beaucoup plus accessible, la plupart des théorèmes projectifs originaux énoncés dans le *Brouillon project*. Aussi comprend-on l'insistance que mettra Leibniz pour tenter d'en faire réaliser la publication.

VI. — Le sort des manuscrits géométriques de Pascal

Leibniz concluait sa lettre à Périer par un jugement très net :

Je conclus que cet ouvrage est en état d'être imprimé et il ne faut pas demander s'il le mérite ; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paraître des traités qui ont quelque rapport avec ce qui est dit dans celui-ci (1), c'est pourquoi je crois qu'il est bon de le donner au plus tôt, avant qu'il perde la grâce de la nouveauté.

Il est évident que ces phrases ne sont pas inspirées par la politesse, mais qu'elles représentent l'expression sincère de sa pensée. Ce fait est confirmé par l'insistance avec laquelle Leibniz reviendra sur ce sujet en 1692 (2) et en 1696 (3) dans sa correspondance avec des Billettes, confirmant aussi bien son jugement sur la valeur du *Traité* de Pascal, que son souhait de le voir imprimé rapidement. Malheureusement les héritiers de Pascal semblent s'être désintéressés du sort de cette œuvre (4) et ne tentèrent pas de la faire publier.

Fait plus grave, le manuscrit qui leur fut restitué par Leibniz ne semble pas avoir été conservé avec le soin qu'il eût mérité. Tou-

(1) Nous avons déjà signalé que Leibniz fait ici allusion à la *Nouvelle méthode en géométrie...*, publiée en 1673 par Ph. de La Hire.

(2) Leibniz à des Billettes, 2-13 juill. 1692 : « Autrefois MM. Périer neveux de Mr Pascal me donnèrent à lire quelques brouillons géométriques de cet excellent génie. Je les débrouillai à leur prière et je les exhortais de les faire imprimer. Je ne sais pas pourquoi cela n'a pas été fait. Je leur avais prédit que ces pensées qui avaient déjà été communiquées à d'autres ne manqueraient pas d'être publiées par d'autres... Cependant encore présentement le tour original que Mr Pascal donne à ces pensées vaudra toujours son prix » (Bibl. de Hanovre, Corr. de Leibniz, Leibniz H. Br. 70).

Leibniz à des Billettes, 8 déc. 1692 : « MM. Périer me montrèrent à Paris des manuscrits géométriques de feu M. Pascal et je les rangeai à leur prière et écrivit *(sic)* une lettre à l'aîné des frères touchant leur ordre. C'est dommage qu'ils ne les ont point publiées. Il faudrait y exhorter celui qui reste » (texte communiqué par P. Costabel).

(3) Leibniz à des Billettes, déc. 1696 : « D'où vient que Messieurs Périer ne publient point les méditations géométriques qu'ils me montrèrent autrefois » (Leibniz, *Die philosophische Schriften*, C. I. Gerhardt, édit., t. VII, p. 454 ; G.E., II, p. 220).

(4) Le 28 mai 1697, des Billettes répondit à Leibniz qu'il ne restait plus que l'un des frères Périer (Louis Périer, chanoine de la cathédrale de Clermont) qui vivait à Clermont avec sa sœur. Et parlant des écrits géométriques de Pascal, il concluait : « Il n'y a rien à attendre des œuvres de ce dernier. Il faut qu'ils les ayent perdues, ou ne les ayent jugées propres à mettre au jour » (G.E., II, p. 220).

jours est-il qu'il n'est mentionné dans aucun document postérieur et qu'il ne paraît pas avoir figuré parmi les manuscrits de Blaise Pascal que Louis Périer déposa en 1711 à la Bibliothèque de Saint-Germain-des-Prés à Paris, manuscrits qui comprenaient en particulier le texte original des *Pensées* (1). Peut-être les divers traités géométriques firent-ils partie des documents pascaliens que Louis Périer transmit par héritage à Marguerite Périer en 1715 (2). Comme celle-ci dispersa ensuite l'ensemble des reliques pascaliennes parvenues en sa possession, dans cette hypothèse on pourrait encore espérer qu'un jour les précieux manuscrits puissent être retrouvés, soit dans leur totalité, soit en partie. Espoir bien mince d'ailleurs, car Bossut, en 1779, tenta en vain de les retrouver (3).

Certes une telle redécouverte, bien improbable, ne pourrait apporter d'informations scientifiques originales, le brillant essor de la géométrie projective au XIXe siècle ayant permis d'aller bien au-delà des résultats obtenus par Desargues et par Pascal. Mais, sur le plan historique, son intérêt serait immense, car elle apporterait des lumières nouvelles sur un des aspects les plus originaux de l'œuvre de Pascal et nous permettrait également de mieux déterminer l'influence que cette pensée novatrice a pu exercer sur divers géomètres de la fin du XVIIe siècle.

A défaut d'une telle découverte, cette dernière influence ne peut être appréciée que d'une façon très incertaine, en tentant d'interpréter avec prudence les rares témoignages en notre possession.

Sur Leibniz lui-même, l'influence de la pensée géométrique pascalienne est indiscutable, mais son analyse, très difficile, ne semble pas avoir été abordée jusqu'ici avec suffisamment d'attention. Aussi nous bornerons-nous à ce sujet à quelques indications très générales.

Il ne semble pas que Leibniz se soit beaucoup intéressé aux nombreux résultats énoncés et démontrés dans le *Traité des coniques*. Par contre, comme toujours, ce qui l'intéresse avant tout, ce sont les fondements méthodologiques et philosophiques de l'œuvre. L'une de ses notes, intitulée *Conica Pascaliana* (4), montre qu'il a clairement apprécié l'originalité et la fécondité de la méthode projective et qu'il entrevoit son extension possible par l'emploi de transformations plus générales. Bien que formulées d'une façon

(1) Cf. J. MESNARD, *Pascal*, Paris, 1951, pp. 131-132.
(2) J. MESNARD, *op. cit.*, p. 132.
(3) *Bossut*, V, p. 459, note.
(4) Cf. ci-dessous, pp. 258-59, 262-63.

quelque peu ambiguë, ses réflexions attestent que la révélation de la fécondité de la méthode des projections renforça l'intérêt qu'il portait déjà à la géométrie de situation et l'attira dans une voie qui annonce déjà la classification des géométries, formulée d'une façon si brillante par Felix Klein deux siècles plus tard, en 1872 (1).

Du côté français, c'est évidemment vers Ph. de La Hire que doit se porter notre attention. Ce mathématicien fut en effet l'un des rares représentants de l'école française à s'intéresser à cette nouvelle conception de la géométrie. Sa *Nouvelle méthode en géométrie...* de 1673 est un exposé typiquement projectif des propriétés des coniques. Et bien que sa méthode d'étude dans le plan, fondée sur l'homologie, soit apparemment originale (2), on peut légitimement se demander s'il n'a pas profité, directement ou non, des idées qui sont à la base des travaux géométriques de Desargues et de Pascal. Le père de ce géomètre, le peintre Laurent de La Hire, fut en effet l'un des rares disciples de Desargues (3). De plus, Ph. de La Hire réalisa ses premiers travaux géométriques en liaison directe avec un autre disciple de Desargues, le graveur A. Bosse (4). Enfin Leibniz, qui vivait à Paris au moment de la publication de la *Nouvelle méthode en géométrie*, semble penser que ce livre doit beaucoup à Desargues et au *Traité des coniques* de Pascal. Il le suggère très nettement dans un passage raturé de sa « Lettre à Périer » (5) et y revient à nouveau, plus explicitement dans sa lettre du 2-13 juillet 1692 à des Billettes.

(1) F. KLEIN, *Vorgleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872.

(2) Sur cette méthode, exposée dans un chapitre spécial : « Les planiconiques », et d'une façon plus générale sur l'ensemble de l'œuvre projective de Ph. de La Hire », voir *Aperçu*, pp. 118-130, 347-348, etc. ; J. L. COOLIDGE, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford, 1945, pp. 40-44 ; R. TATON, La préhistoire de la géométrie moderne (*Rev. Hist. Sci.*, II, 1949, pp. 197-224, spécial. pp. 204-205) ; ID., *Desargues*, pp. 92-93 ; ID., La première œuvre géométrique de Philippe de La Hire (*Rev. Hist. Sci.*, VI, 1953, pp. 93-111) ; D. Th. WHITESIDE, Pattern of mathematical Thought in the later Seventeenth Century (*Arch. for Hist. of Exact Sci.*, I, n° 3, 1961, pp. 179-388, et spécialement pp. 284. 286-288). Notons que Ph. de LA HIRE a publié deux autres ouvrages sur les coniques, l'un fondé sur l'emploi de la géométrie analytique (*Nouveaux éléments des sections coniques...*, Paris, 1679), l'autre d'inspiration mi-projective, mi-classique (*Sectiones conicae in novem libros distributae...*, Paris, 1685). Il serait à souhaiter qu'une monographie détaillée soit consacrée à la vie et à l'œuvre scientifique très variée de Philippe de La Hire (1640-1718).

(3) Sur les rapports de Laurent de La Hire (1606-1656) et de Desargues, cf. *Desargues*, p. 30, n. 1 et p. 60.

(4) Cf. R. TATON, La première œuvre géométrique de Philippe de La Hire (*Rev. Hist. Sci.*, VI, 1953, pp. 73-111).

(5) Cf. ci-dessus, p. 215, n. 3.

Parlant des frères Périer, il écrit en effet :

« Je leur avais prédit que ces pensées qui avaient déjà été communiquées à d'autres ne manqueraient pas d'être publiées par d'autres (1). »

L'affirmation est très claire : le *Traité des coniques* a été consulté par différentes personnes et certaines de celles-ci en ont tiré les éléments de publications personnelles. On ne voit pas qui cette attaque pourrait viser, en dehors de Ph. de La Hire.

Certes ce dernier se défend d'avoir profité des travaux de Desargues et de Pascal (2), mais il est incontestable que certaines coïncidences sont assez troublantes.

D'autres influences possibles sont encore à envisager. Mentionnons d'abord le cas de Tschirnhaus qui étudia attentivement le manuscrit pascalien en même temps que Leibniz. Il faut signaler également le cas de l'école anglaise qui pose un problème assez difficile. On sait que cette école — et Newton en tout premier lieu — s'est activement intéressée à la géométrie projective au cours des dernières années du XVII^e siècle (3). Or il est de fait que le secrétaire de la *Royal Society* a toujours eu de dévoués informateurs en France (4) et que ces derniers avaient pour mission de tenir l'Académie londonienne au courant des progrès scientifiques les plus récents. Si, avant 1670, nous n'avons aucune trace d'enquête sur les travaux projectifs de Desargues et de Pascal, par contre, à partir de 1673, on voit Oldenburg anxieux d'avoir des informations précises à ce sujet (5). Et, s'il faut en croire Gerhardt, cette enquête eut un plein succès, puisque Tschirnhaus aurait envoyé à Oldenburg une analyse détaillée du *Traité des coniques* de Pascal (6). Nous ne voudrions pas tirer de conclusions trop hâtives de ces faits. Mais, imaginant ce qu'un géomètre au talent exceptionnel comme Newton, pouvait tirer de simples indications de méthode, nous

(1) Cf. ci-dessus, p. 248, n. 1.

(2) En particulier dans la préface de sa *Nouvelle méthode en géométrie...* (Paris, 1673) et dans une note préliminaire de la copie qu'il fit du *Brouillon project* de DESARGUES en 1679 (cf. *Desargues*, pp. 196-197).

(3) Cf. D. Th. WHITESIDE in *Arch. for Hist. of Exact Sci.*, I, n° 3, 1961, pp. 270-289.

(4) Voir à ce sujet l'ouvrage d'Harcourt BROWN, *Scientific Organizations in Seventeenth Century France (1620-1680)* (Baltimore, 1934), spécialement pp. 41-63, 91-116, 268-282. Bien que cet ouvrage s'intéresse plus particulièrement aux académies privées et à leurs rapports avec l'Angleterre, il montre avec évidence l'ampleur des relations scientifiques franco-anglaises au cours de cette période.

(5) De nombreuses références à ce sujet se trouvent dans la correspondance échangée entre Leibniz et Oldenburg de 1673 à 1676, cf. *Briefwechsel*.

(6) *Desargues und Pascal*, p. 195, n. 1.

pensons que le problème de l'influence possible de l'école française sur les travaux projectifs de Newton doit être posé très ouvertement. Une récente et remarquable étude de D. Th. Whiteside (1), fondée sur une analyse très attentive des manuscrits newtoniens, a révélé la richesse de l'œuvre réalisée en ce domaine par l'illustre auteur des *Principia*. Il resterait à examiner d'une façon plus précise si cette œuvre n'a pas été influencée, au moins dans ses premières étapes (2), par les travaux français antérieurs, spécialement ceux de Desargues et de Pascal, et aussi ceux de La Hire. Afin de pouvoir aborder cette question avec le maximum de sécurité, il serait nécessaire auparavant d'apporter des arguments irréfutables sur la datation des principaux manuscrits géométriques newtoniens, tâche certainement très délicate pour la majorité de ces textes. Il faudrait enfin, grâce à une exploration des principaux fonds d'archives et de correspondance, ceux de la *Royal Society* et du *British Museum* en premier lieu, tenter d'établir un bilan chronologique des différentes informations parvenues à Londres au sujet des travaux projectifs français, et en particulier du *Traité des coniques* de Pascal.

***

A cause de l'insuffisance des renseignements, divers et fragmentaires, dont nous disposions, la tentative de restitution de l'œuvre géométrique de Pascal que nous avons abordée dans cet article, ne pouvait aboutir à des résultats pleinement satisfaisants. Du moins, espérons-nous avoir apporté à ce sujet certaines précisions nouvelles.

En révélant la richesse d'une pensée profondément consciente de la puissance des méthodes projectives, cette analyse nous conduit à considérer l'œuvre géométrique de Pascal, malencontreusement disparue, comme l'une des créations mathématiques les plus originales du XVII^e siècle. Elle nous confirme également dans l'opinion que la géométrie fut l'un des domaines de la science où le génie pascalien s'exerça avec le plus de fécondité.

Nous voudrions espérer en concluant que certains des problèmes que nous avons évoqués, quant à la forme, au contenu et à l'influence de cette œuvre si riche, susciteront de nouvelles recherches sur l'histoire de la pensée géométrique au XVII^e siècle.

René TATON.

(1) D. Th. WHITESIDE, *Arch. for Hist. of Exact Sci.*, I, 1961, pp. 270-289).

(2) Sans conclure à une influence de la *Nouvelle méthode en géométrie...* de Ph. de La Hire sur Newton, D. Th. WHITESIDE constate des analogies de méthode entre l'exposé de La Hire et certains des premiers travaux géométriques de Newton *(op. cit.*, pp. 284, 286-288).