



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>

737

B

2

135-6

DE BEGINSELEN
VAN
DE THEORETISCHE EN TOEGEPASTE
MECHANICA.



DE BEGINSELEN

VAN

DE THEORETISCHE EN TOEGEPASTE

MECHANICA,

DOOR

DR. E. VAN DER VEN,

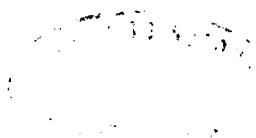
DIRECTEUR VAN DE HOOGERE BURGERSCHOOL TE HAARLEM.

TWEEDE DEEL.



TE LEIDEN, BIJ A. W. SIJTHOFF.

1868.



INHOUD.

EERSTE HOOFDSTUK.

	Bladz.
Over beweging ten gevolge van de werking eener standvastige kracht	1.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Over het behoud van arbeids-vermogen	22.
--	-----

DERDE HOOFDSTUK.

Over de beweging van een lichaam om een vaste as	32.
--	-----

VIERDE HOOFDSTUK.

Over de botsing	49.
---------------------------	-----

VIJFDE HOOFDSTUK.

Over het evenwicht van drupvormige vloeistoffen, op wier oppervlakte drukking wordt uitgeoefend	64.
---	-----

ZESDE HOOFDSTUK.

Bladz.

Over de drukking, die de vloeistoffen in den toestand van evenwicht door hun eigen gewicht uitoefenen.....	72.
---	-----

ZEVENDE HOOFDSTUK.

Over het uitstroomen van vloeistoffen door openingen en door buizen.....	90.
--	-----

ACHTSTE HOOFDSTUK.

Over de drukking en het uitstroomen van gassen.....	102.
---	------

II.

DYNAMICA VAN VASTE LICHAMEN.

EERSTE HOOFDSTUK.

Over beweging ten gevolge van de werking eener standvastige kracht.

1. Reeds vroeger (I. § 6) zagen wij, dat een stoffelijk punt, na gedurende t sekonden zich met eene versnelling γ bewogen te hebben, eene snelheid γt heeft verkregen als de aanvangs-snelheid *nul* is. De in die t sekonden doorloopen weg wordt dan door $\frac{1}{2} \gamma t^2$ voorgesteld.

Eene rechtlijnige gelijkmatig versnellende beweging, die eene aanvangs-snelheid c en eene versnelling γ heeft, kan men beschouwen als bestaande uit twee bewegingen, wier richtingen samenvallen, en wel als eene gelijkmatige met eene snelheid c en eene gelijkmatig versnellende met eene aanvangs-snelheid *nul* en eene versnelling γ . Na t sekonden zal dan de snelheid

$$1 \dots\dots c \pm \gamma t$$

en de afgehoopen baan

$$2 \dots\dots ct \pm \frac{1}{2} \gamma t^2$$

zijn, in welke beide uitdrukkingen het bovenste of het onderste teeken moet gekozen worden, al naarmate de oorspronkelijke

beweging geschiedt in eenen met de versnelling overeenkomstigen of in eenen aan haar tegenovergestelden zin.

2. Meer dan eene gelijkmatig versnellende beweging, die een punt gelijktijdig heeft uit te voeren, kan men, als hunne aanvangs-snelheid *niet nul* is, altijd beschouwen als allen samengesteld op de in § 1 genoemde wijze. Echter zal in het algemeen de richting van de aanvangs-snelheid niet met die van de versnelling samenvallen. Zijn zij op de genoemde wijze ontbonden, dan kan men de gelijkmatige met elkander, en de gelijkmatig versnellende met eene aanvangs-snelheid *nul* met elkander, verbinden tot twee resulterende bewegingen, waarvan dan de eene gelijkmatig, de andere gelijkmatig versnellend zijn zal. (I. § 7—9). Is het daarenboven bekend, dat het punt, onafhankelijk van de zooeven genoemde, nog een of meer gelijkmatige bewegingen heeft te volgen, dan zal men deze met de resulterende van de uit de ontbinding voortgekomenen gelijkmatige bewegingen kunnen samenstellen tot eene.

Derhalve komt het samenstellen van gelijkmatige en gelijkmatig versnellende bewegingen altijd neder op het samenstellen van eene gelijkmatig versnellende met eene aanvangs-snelheid nul en eene gelijkmatige, wier richting met die van de eerstgenoemde een hoek α maakt.

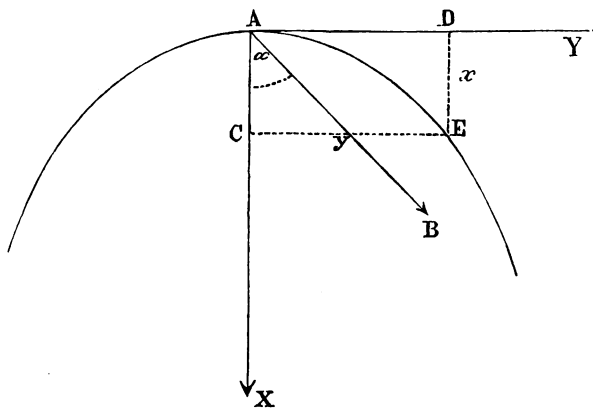


Fig. 70.

Zij (Fig. 70) AX de richting van de gelijkmatig versnellende,

A B die van de gelijkmatige beweging, γ de versnelling in de eerste, s de snelheid in de tweede richting. Ontbinden wij deze in twee richtingen, waarvan de eene met die van de gelijkmatig versnellende samenvalt en de andere daarop loodrecht staat, dan zijn de ontbondenen volgens A X

$$a = s \cos. \alpha$$

en volgens A Y

$$b = s \sin. \alpha.$$

Na t sekonden is dus de geheele snelheid in de richting A X

$$3 \dots v_x = \gamma t + a$$

en in de richting A Y

$$4 \dots v_y = b.$$

De in de eerstgenoemde richting in dien tijd afgelegde baan zal door

$$5 \dots x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + a t$$

en de in de laatstgenoemde richting doorloopene door

$$6 \dots y = b t,$$

worden voorgesteld.

Door voor t achtereenvolgens verschillende waarden aan te nemen, deze in de vergelijkingen (5) en (6) te substitueeren en de overeenkomstige waarden A C en A D van x en y op A X en A Y uit te zetten, zal men van de baan zoovele punten E als men goedvindt kunnen construeeren. Elimineert men echter t tusschen die vergelijkingen, dan verkrijgt men een onmiddellijk verband tusschen x en y , waardoor de gedaante van de gansche baan wordt voorgesteld.

Deze eliminatie geeft de vergelijking

$$7 \dots x = \frac{a}{b} y + \frac{\gamma}{2 b^2} y^2;$$

zij stelt eene kromme lijn voor, die ten opzichte van de lijn A X symmetriek zal zijn als men in die vergelijking $a = 0$ stelt. In dat geval toch wordt zij

$$8. \dots\dots\dots x = \frac{\gamma}{2b^2} y^2$$

of
$$y^2 = \frac{2b^2}{\gamma} x,$$

zoodat met elke waarde van x twee waarden van y overeenstemmen, die alleen in teeken verschillen. Zij is onder deze gedaante de voorstelling van een *parabool*, wier as met de lijn A X samenvalt.

Daar $a = s \cos. \alpha$ is, sluit de vooronderstelling $a = 0$ deze andere in zich, dat $\alpha = 90^\circ$ en dus $b = s$ is. Indien dus de aanvangs-snelheid een *rechten hoek* maakt met de richting van de versnelling, is de baan een parabool wier top ligt in het punt waar de gelijkmatig versnellende beweging aanvangt, en wier as met de richting van de versnelling samenvalt.

Omtrent hare gedaante leert de vergelijking (8), dat hare kromming in de nabij den top gelegene punten toeneemt, naarmate de waarde van $\frac{2b^2}{\gamma}$ afneemt. De met eene zelfde waarde van x overeenkomende waarden van y toch, zullen des te kleiner zijn, dat wil zeggen, de vorm van de parabool zal des te meer gekromd zijn, naarmate de waarde van dien coëfficiënt kleiner is. Bij eene aanmerkelijke versnelling dus en eene geringe aanvangs-snelheid zal de baan sterk gekromd zijn.

3. Een punt dus dat eene gelijkmatig versnellende beweging ontvangt in eene zekere richting, terwijl het reeds eene snelheid heeft, in eene richting die loodrecht is op de eerstgenoemde, zal zich van den top der parabool af langs deze kromme bewegen, en dus als het ware een van de takken dezer kromme geheel doorloopen.

Uit de vergelijkingen (3—6) volgt, door in haar $a = 0$ te stellen, dat na t sekonden de snelheden in de richtingen A X en A Y

$$11 \dots\dots\dots v_x = \gamma t$$

$$12 \dots\dots v_y = b$$

en de in die richtingen afgelegde banen

$$13 \dots\dots x = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

$$14 \dots\dots y = b t$$

zullen zijn.

Heeft bij den aanvang der versnelling het punt reeds eene snelheid *wier ontbondene in de richting der versnelling niet nul is en met deze in teeken overeenkomt*, heeft dus a eene positieve waarde, dan zal het zijn alsof het punt A' reeds door den top A (Fig. 71) der parabool is gegaan. Om zijne

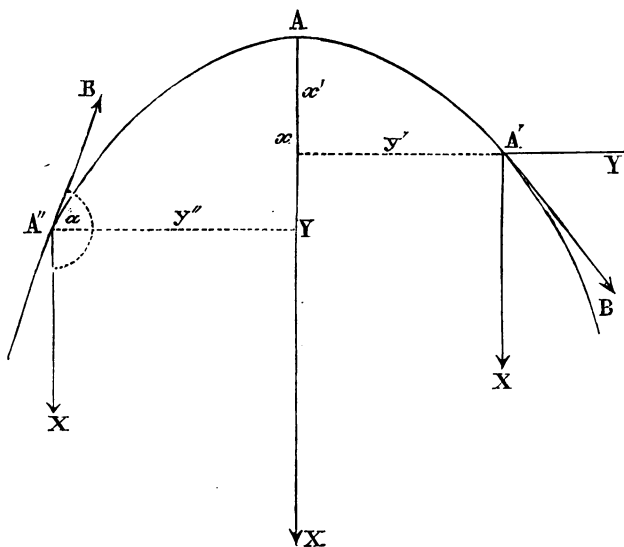


Fig. 71.

plaats te bepalen zal men slechts behoeven na te gaan, in hoeveel tijd een punt, als het met eene aanvangs-snelheid uit den top vertrekt wier ontbondene in de richting AX *nul* was, door de versnelling alleen eene snelheid zal verkrijgen, wier ontbondene in die zelfde richting a is. Uit de vergelijking (11)

blijkt, dat die tijd door $t = \frac{a}{\gamma}$ wordt voorgesteld; en door substitutie van deze waarde in de vergel. (13) en (14), dat

$$15 \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{a^2}{2\gamma} \\ y' = \frac{ab}{\gamma} \end{array} \right.$$

de coördinaten van het punt zijn.

Maakt de aanvangs-snelheid met de versnelling een stompen hoek, *verschilt dus hare ontbondene volgens AX met de versnelling in teeken*, dan zal het zijn alsof het punt A'' den top der parabool nog niet heeft bereikt. Om nu zijne plaats te bepalen, zal het slechts noodig zijn te weten, hoeveel tijd er nog verlopen moet eer die ontbondene der aanvangs-snelheid door de werking der versnelling alleen zal zijn vernietigd. Daartoe zal $\gamma t - a' = 0$ moeten zijn, zoodat nu het punt na $t = \frac{a'}{\gamma}$ sekonden den top bereikt en dus zijne coördinaten:

$$16 \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x'' = \frac{a'^2}{2\gamma} \\ y'' = -\frac{a'b}{\gamma} \end{array} \right.$$

zijn.

In elk geval dus zal men met behulp van de vergelijkingen (8), (15) en (16) den te doorloopen weg kunnen construeeren. De door vergelijking (8) voorgestelde kromme toch stelt de baan voor, die doorloopen zou worden als de aanvangs-snelheid met de versnelling een rechten hoek maakte; zij kan in elk geval geconstrueerd worden, zoodra de waarden van γ en van b gegeven zijn. Op deze kromme nu zal als in den aanvang a eene positieve waarde heeft de baan beginnen in het aan de vergel. (14), en als a eene negatieve waarde heeft in het door vergel. (16) bepaalde punt.

4. Vooronderstellen wij thans, dat op een stoffelijk punt eene standvastige kracht werkt, een kracht dus wier richting en intensiteit voortdurend dezelfde blijven. De toename van de snelheid, waarmede het zich onder dien invloed zal bewegen, zal aan den tijd evenredig zijn, m. a. w. (§ 4)

het punt zal eene gelijkmatig versnellende beweging aannemen. Beweegt het zich reeds met eene zekere snelheid op het oogenblik dat de standvastige kracht begint te werken, dan zal zijne beweging de resulteerende zijn van deze gelijkmatige en de gelijkmatig versnellende; het zal dus in het algemeen de kromme lijn beschrijven, wier voornaamste eigenschappen wij in de laatste § leerden kennen.

Die parabool zal in eene rechte lijn overgaan, wanneer het bijzondere geval zich voordoet, dat de richting van de oorspronkelijke beweging samenvalt met die van de standvastige kracht. Werkt deze tevens in den zin, waarin die oorspronkelijke beweging plaats heeft, dan is de rechtlijnige beweging eene gelijkmatig versnellende. In het tegenovergestelde geval zal zij eene gelijkmatig vertragende zijn, die, na den tijd t waarvoor $c - \gamma t = 0$ is (vergel. 1) van teeken veranderende, in eene tegenovergesteld gerichte gelijkmatig versnellende overgaat.

5. Eene standvastige kracht als de zooeven genoemde is de aantrekking, die de aarde op de lichamen aan hare oppervlakte uitoefent. (I. § 36). Laten wij dus de werking van alle andere oorzaken van beweging of verandering in beweging buiten rekening, dan zal, overeenkomstig met het in de vorige § gezegde, ten gevolge van hare werking het zwaartepunt van eenig lichaam, dat bij den aanvang dier werking zich reeds met zekere snelheid beweegt, in het algemeen eene parabool beschrijven. Maakt de oorspronkelijke beweging een rechten hoek met de vertikaal van het zwaartepunt, dan zal dit den neergaanden tak van die kromme van den top af doorloopen, terwijl het zich of slechts langs een gedeelte van dien tak, of langs een gedeelte van den opgaanden en langs den geheelen neergaanden tak zal bewegen, al naarmate die oorspronkelijke beweging met de richting waarin het lichaam wordt aangetrokken een scherp en of stompen hoek maakt (§ 3).

Is het lichaam in rust als de versnelling begint — vrije val — of valt de richting van de beweging, die het dan reeds heeft, samen met de vertikaal van zijn zwaartepunt, dan

zal dit zich voortdurend op die vertikaal blijven bewegen. In het laatste geval zal deze beweging versnellend of vertragend zijn, al naarmate het zich in den aanvang van de aarde of naar de aarde bewoog.

Noemen wij nu weder (I. § 11) de versnelling, die in het luchtledige de aantrekkingskracht aan de lichamen mededeelt, g ($g = 9.812 \dots$) dan zal een lichaam, dat vrij valt, na t sekonden eene snelheid

$$17 \dots \dots \dots s = g t$$

hebben, terwijl het in die t sekonden een weg

$$18 \dots \dots \dots h = \frac{1}{2} g t^2$$

zal doorloopen.

Uit de vergelijkingen (17) en (18) volgen deze twee

$$19 \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} s = \sqrt{2 g h} \\ h = \frac{s^2}{2 g}; \end{array} \right.$$

de eerste leert welke snelheid een lichaam heeft als het van eene hoogte h is gevallen, de tweede van welke hoogte het vallen moet om eene bepaalde snelheid s te verkrijgen.

Wordt een lichaam in de richting van de vertikaal naar boven geworpen door eene kracht, die het eene snelheid a geeft, dan zal het stijgen gedurende den tijd t , die aan de vergelijking

$$a - g t = 0$$

voldoet, en daarbij eene hoogte

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{g}$$

bereiken boven het punt van uitgang. Voor eene waarde van t , die grooter is dan $\frac{a}{g}$, is de snelheid negatief; dus zal het lichaam na den tijd $\frac{a}{g}$ weder vallen, en, volgens vergel. (19) in het punt van uitgang terugkomen met eene snelheid

$$20 \dots \dots s = \sqrt{2g \cdot \frac{a^2}{2g}} = a,$$

dat wil zeggen, met dezelfde snelheid, als waarmede het dat punt heeft verlaten.

Nauwkeurige proeven leverden uitkomsten op, die geheel met deze berekeningen overeenstemmen; zij bevestigen daardoor de hypothese, waarvan bij die berekening is uitgegaan, de hypothese namelijk, dat de aantrekking der aarde eene standvastige kracht is.

Hellend vlak van GALILEI.

Valmachine van ATTWOOD.

6. Vooronderstellen wij thans, dat een lichaam door een *horizontaal werkende kracht* in de ruimte wordt geworpen met eene snelheid s .

Na t sekonden zal dit lichaam in vertikale richting (vergel. 11) eene snelheid

$$v_x = g t$$

en in horizontale richting eene snelheid

$$v_y = b = s$$

hebben verkregen. De resultante van beide snelheden zal dan door

$$\sqrt{s^2 + g^2 t^2}$$

worden voorgesteld, terwijl de grootte van den hoek, dien de richting van de beweging met die van de werking der aantrekkingskracht maakt, door de vergelijking

$$\text{tang. } \alpha = \frac{s}{g t}$$

wordt bepaald.

Uit de vergel. (13) en (14) volgt verder, dat het lichaam na t sekonden tot op eenen afstand

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

beneden het punt van uitgang zal gedaald zijn, terwijl het daarvan in horizontale richting tot op eenen afstand

$$y = s t$$

zal zijn gekomen.

Wordt het lichaam *schuins naar beneden* geworpen met eene

snelheid s en in eene richting; die met de richting waarin de zwaartekracht werkt den scherpen hoek α maakt, dan zal het na t sekonden eene snelheid

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

hebben in eene richting, wier helling ten opzichte van de richting der vertikaal door

$$\text{tang. } \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

wordt bepaald. In dit geval echter zal

$$v_x = g t + s \cos. \alpha$$

en

$$v_y = s \sin. \alpha$$

zijn, in welke vergelijkingen dan $\cos. \alpha$ en $\sin. \alpha$ beiden positief zijn. Daarbij zal het beneden het punt van uitgang gedaald zijn tot op eenen afstand (vergel. 5)

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + s \cos. \alpha \cdot t,$$

terwijl het (vergel. 6) in horizontale richting op eenen afstand

$$y = s \sin. \alpha \cdot t$$

van dat punt zal zijn verwijderd.

Wordt eindelijk het lichaam *schuins naar boven* geworpen met eene snelheid s , en wel zóó dat die meegedeelde beweging een stomp hoek α maakt met de richting waarin het door de aarde wordt aangetrokken, dan zullen nog de zooeven genoemde vergelijkingen gelden. Echter zullen dan van de in haar voorkomende grootheden $\cos. \alpha$ en $\sin. \alpha$ de eerste negatief de laatste positief zijn.

In horizontale richting heeft dus de snelheid van het lichaam steeds de positieve waarde

$$v_y = s \sin. \alpha;$$

zijne snelheid in de richting van de vertikaal echter, die, als wij het teeken van $\cos. \alpha$ reeds dadelijk in rekening brengen,

$$v_x = g t - s \cos. \alpha$$

tot uitdrukking heeft, zal negatief zijn tot op het oogenblik

dat $gt = s \cos. \alpha$ wordt. De resulteerende snelheid, die door $\pm \sqrt{v_y^2 + v_x^2}$ wordt voorgesteld, is eene absolute grootheid, zoodat van de beide teekens, die de wortelgrootheid toekomen, steeds het bovenste moet genomen worden. De hoek echter, dien de richting van de beweging met die van de zwaartekracht maakt, zal eene positieve of negatieve tangens hebben d. w.

z. scherp of stomp zijn al naarmate $t >$ of $< \frac{s}{g} \cos \alpha$ is.

De waarde van die tangens toch wordt door $\frac{v_y}{v_x}$ bepaald.

De in horizontale en vertikale richting ontbondenen van de baan zijn

$$y = s \cdot \sin. \alpha \cdot t$$

en

$$x = \frac{1}{2} g t^2 - s \cos. \alpha \cdot t = t \left(\frac{1}{2} g t - s \cos. \alpha \right);$$

uit de laatste volgt, dat het lichaam boven het punt van uitgang zal liggen zoo lang $t < \frac{2 s \cos. \alpha}{g}$ is, terwijl het, als

$t = \frac{2 s \cos. \alpha}{g}$ wordt, weder met dat punt in hetzelfde horizontale vlak ligt.

Wordt dus een lichaam van den bodem schuins naar boven geworpen, dan zal het na den tijd $\frac{2 s \cos. \alpha}{g}$ dien bodem wederom bereiken, en dit zal plaats hebben in een punt, dat op een afstand

$$21 \dots y = \frac{2 s^2}{g} \sin. \alpha \cos. \alpha = \frac{s^2}{g} \sin. 2 \alpha$$

van het punt van uitgang is verwijderd.

De in deze vergelijking voorkomende hoek α is, daar het teeken van $\cos. \alpha$ reeds boven is in rekening gebracht, de scherpe hoek, dien de richting van de oorspronkelijke beweging maakt met de richting, tegenovergesteld aan die waarin het lichaam door de aarde wordt aangetrokken. Deze hoek is van de helling der oorspronkelijke beweging ten opzichte van den

horizon het complement. Toch zal de vergel. (21), daar in haar tweede lid zoowel $\cos. \alpha$ als $\sin. \alpha$ als factoren voorkomen, evenzeer voor dezen hoek gelden als voor den eerstgenoemde. Daar nu dat laatste lid zoo groot mogelijk wordt als $2\alpha = 90^\circ$ is, zal een lichaam, dat schuins wordt opgeworpen, zoo ver mogelijk van het uitgangspunt neerkomen, wanneer de oorspronkelijke beweging een hoek van 45° maakt met den horizon. Daar verder $\sin. (90^\circ + \beta)$ en $\sin. (90^\circ - \beta)$ in waarde en teeken overeenkomen, zal de afstand waarop het lichaam neerkomt bij eene helling van $45 + \gamma$ graden even groot zijn als bij eene helling van $45 - \gamma$ graden.

Voorbeelden.

1. Een lichaam legt met gelijkmatig versnellende beweging in 10 seconden een baan af van 500 meters; welke versnelling (γ) heeft het en hoe groot is zijne snelheid (s) aan het einde van zijn baan?

Antw. $\gamma = 10$ meters.

$s = 100$ meters.

2. Welke eindsnelheid (s) heeft een lichaam, als het van eene hoogte van 100 meters is gevallen, en in hoeveel tijd (t) is het beneden?

Antw. $s = 44.3$ meters ongeveer.

$t = 4.5$ seconden ruim.

3. Welke zouden in het vorige vraagstuk de waarden van s en t zijn, als het lichaam eene aanvangs-snelheid van 10 meters had gehad?

Antw. $s = 45.4$ meters ruim.

$t = 3.6$ seconden ruim.

4. Wanneer een lichaam met eene aanvangs-snelheid van 50 meters vertikaal opwaarts geworpen wordt, welke hoogte (h) zal het dan bereiken, en welke snelheid (s) zal het hebben op eene hoogte van 96 meters?

Antw. $h = 127.35$ meters.

$s = 24.88$ meters.

5. Een steen valt van eene hoogte en 3 seconden later wordt met eene snelheid van 40 meters hem een andere achterna geworpen; na hoeveel tijd (t) zal deze den eersten steen inhalen?

Antw. Na 4.2 seconden ongeveer.

6. Twee punten liggen in dezelfde vertikaal, het eene 30 meters lager dan het andere. Uit het hoogste punt valt een lichaam en 1 seconde later een uit het laagste punt. Na hoeveel tijd wordt dit door het eerste ingehaald?

Antw. Na 2.56 seconden.

7. De gewichten eener valmachine van ATTWOOD wegen elk 99 decagr.

en het overwicht 2 decagr. Hoe groot is de versnelling (g') waarmede dit laatste zal vallen?

Antw. $g' = 0.09812$.

8. Een lichaam wordt schuins naar boven geworpen met eene snelheid van 24 meters en in eene richting die een hoek van 30° met den horizon maakt. Op welken afstand (y) van het punt van uitgang zal het weder den bodem bereiken en welke is de grootste afstand (y_m), waarop men het bij de gegevene aanvangs-snelheid zou kunnen werpen?

Antw. $y = 50.78$ meters ongeveer.

$y_m = 58.7$ meters ruim.

7. Bij alle onze beschouwingen en berekeningen kenden wij steeds aan g dezelfde waarde toe, de waarde namelijk die deze versnelling op onze breedte heeft aan de oppervlakte der zee. Deze grootte nu die zelf evenredig is met de grootte van de aantrekking, die de aarde op de vallende lichamen uitoefent, is daardoor rechtstreeks evenredig met de massa van dat hemellichaam en omgekeerd evenredig met de tweede machten der afstanden, waarop zich de vallende lichamen van zijn middelpunt bevinden. Want, schoon de aantrekkingskracht ook met de massa's dezer lichamen zelve rechtstreeks evenredig is, zal men lichtelijk inzien, dat deze omstandigheid op de grootte van hunne versnelling niet van invloed zijn kan.

Noemen wij dus de massa van de aarde m , hare straal r , de grootte van de versnelling aan hare oppervlakte g , en stellen wij de overeenkomstige waarden, in zooverre zij op eenig ander hemellichaam betrekking hebben, door M , R en g' voor, dan zal aan de oppervlakte van dit hemellichaam

$$g' = g \frac{M r^2}{m R^2}$$

zijn.

Is h de hoogte waarop zich op onze breedte een lichaam boven de oppervlakte der zee bevindt dan zal de versnelling van dat lichaam als het begint te vallen

$$g_1 = g \cdot \frac{r^2}{(r + h)^2}$$

zijn. Met betrekking tot de grootte van r — ongeveer 860 D. G. mijlen — zijn de waarden, die h heeft in de boven door

ons opgegeven voorbeelden zeer gering; daar mochten wij dus inderdaad g als gedurende den ganschen val standvastig aan nemen. Anders echter zou het zijn, wanneer wij vooronderstelden dat het lichaam bij dien val eene hoogte van eene D. G. mijl had te doorloopen. Dan toch zou de versnelling in den aanvang $9.812 \dots \left(\frac{860}{861}\right)^2 = 9.789 \dots$ meters en aan het einde $9.812 \dots$ meters bedragen. De eerstgenoemde waarde zal dus g hebben op den top van een berg die eene Duitsche geographische mijl hoog is en op onze breedte gelegen. En dezelfde waarde zou die grootheid ook hebben op de plaatsen der aarde, die zooveel nader aan den aequator liggen, dat hunne afstand tot het middelpunt der aarde D. G. mijl meer bedraagt dan de onze, indien niet nog eene andere oorzaak de waarde van de versnelling der vallende lichamen op verschillende breedten met deze breedten deed veranderen.

Voorbeelden.

9. Met welke versnelling (g') zou de maan, indien zij niet nog eene andere beweging had, op de aarde vallen in de eerste sekonde van haren val?

(De afstand v. d. maan tot het middelpunt der aarde is ongeveer gelijk aan 60 maal den straal van de aarde).

Antw. $g' = 0.0027$ meters.

10. Hoe groot is de versnelling (g') aan de oppervlakte van de zon?

(Massa der zon $= 355000 \times$ massa v. d. aarde.

Straal v. d. zon $= 110 \times$ straal v. d. aarde).

Antw. $g' = 288$ meters.

8. Wanneer op een stoffelijk punt, als het reeds eene zekere beweging heeft, een kracht zóó werken gaat, dat hare richting met die van de oorspronkelijke beweging een rechten hoek maakt, dan zal daardoor wel de richting waarin maar niet de snelheid waarmede dat punt zich beweegt, worden veranderd. Zoo zagen wij bijv. dat op de parabool de beweging links van den top eene vertragende rechts van den top echter eene versnellende was, dat dus in den top zelf, waar de vertragende in eene versnellende overgaat, de snelheid een oogenblik constant is. En juist in dien top is de werking van de kracht loodrecht op de richting van de beweging.

Ten gevolge nu van die werking zal het punt zich met dezelfde snelheid blijven bewegen, maar in eene richting, die met de oorspronkelijke een hoek α maakt, wiens grootte afhangt van de grootte van de kracht en van die snelheid zelve. Houdt de kracht dadelijk op te werken, dan zal het punt in die gewijzigde richting blijven voortgaan. Maar vooronderstel dat na eenigen tijd dezelfde kracht wederom gedurende een oogenblik werkt in eene richting loodrecht op de dan plaats grijpende beweging, dan zal deze wederom langs een baan, die met de reeds gewijzigde een hoek α maakt, worden voortgezet met eene snelheid gelijk aan de oorspronkelijke. Herhaalt zich nu de werking van diezelfde kracht met gelijke tusschenpoozen, dan zal het punt den omtrek van een regelmatigigen veelhoek met gelijkmatige snelheid doorloopen, en dit zal nog zoo zijn al worden die tusschenpoozen ook nog zoo klein genomen. De regelmatigige veelhoek nu zal met het afnemen dier tijdsruimten hoe langer zoo meer tot een cirkel en de bij tusschenpoozen werkende kracht hoe langer zoo meer tot eene standvastige kracht naderen, wier richting voortdurend met de raaklijn van dien cirkel een rechten hoek maakt.

Wanneer dus een stoffelijk punt, dat met zekere snelheid zich beweegt, komt onder den invloed van eene standvastige kracht, wier werking van een bepaald centrum uitgaat en steeds loodrecht blijft op de baan van het punt, dan zal dit met gelijkmatige snelheid een cirkel om dat centrum beschrijven.

Werd de oorspronkelijke snelheid van het punt, de snelheid dus in de richting van de raaklijn, plotseling vernietigd, dan zou het door deze kracht, die men de Centripetaalkracht noemt, naar het middelpunt worden getrokken, en zich daaraan bewegen met eene gelijkmatige versnelling. Dit middelpunt zelf zal eene even groote reactie, dus eene trekking naar den cirkelomtrek ondervinden; aan deze heeft men den naam Centrifugaalkracht gegeven. Houdt de standvastige kracht op te werken dan houdt gelijktijdig hare reactie op te bestaan,

en het lichaam zal zich in richting van de raaklijn van het middelpunt verwijderen.

Beschouwt men de beweging van eene planeet om de zon als het gevolg van de steeds van deze uitgaande aantrekkingskracht, dan zal de in tegenovergestelden zin werkende aantrekking van de planeet de reactie of centrifugaalkracht zijn. Beschouwde men beide deze krachten als werkende op de planeet, dan zou, daar beide elkander noodzakelijk opheffen, de eenige reden waarom de baan cirkelvormig is ophouden te bestaan.

Indien omgekeerd een stoffelijk punt door eenige andere oorzaak gedwongen wordt met gelijkmatige snelheid een cirkel te beschrijven, dan zal nog altijd de kromming van de baan zich voordoen als het gevolg van de werking eener standvastige kracht, wier richting steeds door het middelpunt gaat. In dit geval echter zal de reactie of centrifugaalkracht op het stoffelijk punt zelf kunnen werken.

Beschrijft bijv. een lichaam eene cirkelvormige baan, terwijl het door een koord met het middelpunt is verbonden, dan zal men kunnen berekenen welke van dit punt uitgaande standvastige kracht er noodig zou zijn, om het met dezelfde snelheid een even grooten cirkel te doen doorloopen. Met die kracht zal het door het koord naar het middelpunt worden getrokken (centripetaalkracht) terwijl het zelf met even groote kracht (centrifugaalkracht) door middel van het koord het middelpunt naar zich zal trekken. Beide krachten zijn met elkander in evenwicht en bepalen de spanning van het koord; men zal ze echter in een willekeurig punt kunnen doen aangrijpen.

Doorloopt iemand met gelijkmatige snelheid een cirkel, dan dringt hij, schoon onbewust, zijn eigen lichaam voortdurend met eene standvastige kracht naar het middelpunt (centripetaalkracht) wier grootte men kan berekenen. Hij zou dien zelfden cirkel doorloopen als hij zelf steeds met dezelfde snelheid vooruit liep en door een ander met de genoemde kracht voortdurend naar het middelpunt geduwd werd. Maar dan zou hij op dezen persoon ook eene even groote tegendrukking (centrifugaalkracht) nitoeenen, en deze zelfde reactie ondervindt zijn eigen lichaam als hij door eigen inspanning voortdurend op den cirkel blijft. Wordt het moment dezer reactie, ten opzichte van den buitenkant zijner ondersteunings-vlakte grooter dan dat van zijn gewicht, dan zal hij omvallen met het hoofd buitenwaarts.

De grootte van de standvastige kracht, die de eenheid van massa met eene standvastige snelheid s een cirkel doet doorloopen, wiens straal r is, zal van s en r afhankelijk moeten zijn. Om de vergelijking te vinden, die deze afhankelijkheid uitdrukt, nemen wij aan, dat het punt in den tijd t den boog

$AB = l$ (Fig. 72) doorloopt onder den invloed van een stand-
vastige kracht, die alleen werkende aan de eenheid van massa

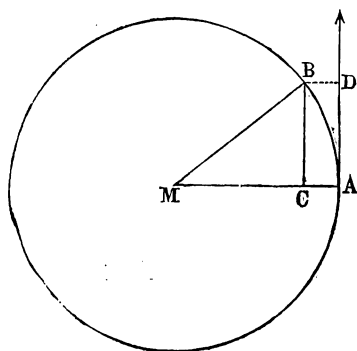


Fig. 72.

een versnelling γ zou mededeelen. Had zij gedurende t sekonden, evenwijdig met AM werkende, het punt slechts van A naar B gevoerd, dan zou (vergel. 13)

$$AC = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{(\text{koorde } AB)^2}{2r}$$

de vergelijking zijn, waaruit de grootte γ van hare werking op de eenheid van massa kon worden afgeleid.

Deze vergelijking is echter niet geldig zoolang t eene eindige waarde heeft, want gedurende dien tijd blijft de richting der kracht niet onveranderd, daar zij steeds door het punt M gaat. Toch wordt zij meer en meer eene ware vergelijking naarmate t kleiner wordt; naar die mate toch naderen de beide uiterste richtingen der kracht tot de evenwijdigheid. Zij zal dus gelden wanneer t zoo klein wordt, dat de lengten van *koorde* AB en van *boog* AB niet verschillen.

In dat geval wordt zij

$$\frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{(\text{boog } AB)^2}{2r} = \frac{l^2}{2r}$$

waaruit volgt:

$$\gamma = \frac{l^2}{t^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

De breuk $\frac{l}{t}$ echter heeft gedurende de gansche beweging dezelfde waarde als gedurende dat eerste tijdsdeeltje; de beweging toch is eene gelijkmatige en die breuk hare snelheid. Derhalve zal

$$\gamma = \frac{v^2}{r}$$

de voortdurend op de eenheid van massa werkende kracht zijn. Heeft het stoffelijk punt een massa m , dan is

$$22 \dots\dots\dots K = m \gamma = m \frac{s^2}{r}$$

de grootte van de centripetaalkracht die er op werkt en dus ook van de in tegenovergestelde richting op het punt M werkende centrifugaalkracht.

Uit de vergel. (22) blijkt:

1^o dat indien men eenige lichamen, die even zwaar zijn, met dezelfde snelheid verschillende cirkels doet doorloopen, de daarmede overeenkomstige centripetaalkrachten, en dus ook hare reactiën de centrifugaalkrachten, met de stralen der cirkels omgekeerd evenredig zijn;

2^o dat, indien men lichamen, die een verschillend gewicht hebben, met dezelfde snelheid denzelfden cirkel doet doorloopen, beide krachten evenredig met de massa's zijn zullen;

3^o dat, wanneer door lichamen, die even zwaar zijn, denzelfden cirkel met verschillende snelheden worden doorloopen, de op hen werkende centrifugaalkrachten evenredig zijn met de tweede machten der snelheden.

Men kan de grootte van de centrifugaalkracht nog onder eene andere gedaante, dan de in vergel. 22 voorgestelde, brengen. Men kan namelijk de snelheid in plaats van door den boog s , die in de eenheid van tijd wordt doorloopen, door den hoek ω voorstellen, dien deze boog onderspant. Van een cirkel, wiens omtrek zich zelf zoo beweegt dat een punt daarvan eene snelheid s heeft, zal dan de straal in eene sekonde den hoek ω gedraaid zijn en die in de eenheid van tijd doorloopen hoek de hoeksnelheid voorstellen. Neemt men nu als eenheid van hoeksnelheid den hoek aan, die doorloopen wordt als een punt van den omtrek een boog doorloopt wiens lengte aan den straal gelijk is, dan zal het getal dat de hoeksnelheid uitdrukt

$$\omega = \frac{s}{r}$$

zijn. Substitueert men de uit haar voortvloeiende waarde van s in de vergel. (22) dan wordt zij

$$K = m \omega^2 r.$$

9. Zooals bekend is beweegt zich de aarde, in ongeveer vierentwintig uren, of, meer nauwkeurig, in 86164 sekonden om hare as. Noemen wij den afstand, waarop zich eenig punt van hare oppervlakte van die as bevindt R , dan zal dat punt in dien tijd gedwongen zijn den cirkel te beschrijven, wiens omtrek door $2\pi R$ wordt voorgesteld. Zijne snelheid zal dus $\frac{2\pi R}{86164}$ en de op hem werkende centrifugaalkracht

$$K = \frac{4\pi^2 R}{(86164)^2} m$$

zijn, als m zijne massa voorstelt.

Daar aan de polen $R=0$ is zal op een punt, dat zich daar bevindt, die kracht niet werken. Onder den aequator, waar die afstand zijne grootste waarde bereikt, zal zij zoo groot mogelijk zijn en wel omdat daar $2\pi R=40000000$ meters is, door

$$K = \frac{2}{59} m$$

worden voorgesteld.

Werd een punt onder den aequator, waaraan in de richting van de raaklijn eene snelheid was gegeven gelijk aan zijne tegenwoordige, naar het middelpunt van de aarde getrokken door een standvastige kracht, die alleen werkende aan de eenheid van massa eene versnelling van $\frac{2}{59}$ meters mededeelde, dan zou dit punt met dezelfde snelheid den omtrek der aarde doorloopen, en de reactie dier kracht zou dan op het middelpunt werken. Thans, nu het door andere oorzaken wordt gedwongen dien cirkel te beschrijven, werkt zij op het stoffelijk punt zelf, en wel zóó, dat zij onder den aequator de werking der zwaartekracht rechtstreeks tegenwerkt. Is dus g' de versnelling, die een lichaam zou ondervinden als het onder den aequator op eene niet draaiende aarde nederviel, en g de ver-

snelling die daar plaats heeft op de aarde zooals zij zich thans rondwentelt, dan zal

$$g = g' - \frac{2}{59} = g' \left(1 - \frac{2}{59 g'} \right)$$

zijn. Daar nu, bij benadering,

$$g' \left(1 - \frac{2}{59 g'} \right) = g' \left(1 - \frac{2}{59 \times 9.2} \right) = g' \left(1 - \frac{1}{289} \right)$$

is, wordt de werking van de zwaartekracht onder den aequator door die van de centrifugaalkracht voor ongeveer $\frac{1}{289}$ van haar bedrag vernietigd.

Geschiedde de onwenteling der aarde met eene snelheid die 17maal zoo groot was als de tegenwoordige, dan zou onder den aequator

$$K = \frac{2 \times 289}{59} m$$

en dus

$$g = g' \left(1 - \frac{2 \times 289}{59 \times 9.8} \right) = 0$$

zijn. De lichamen, die zich daar aan de oppervlakte der aarde bevonden, zouden dus onder de werking van beide krachten in evenwicht zijn.

Buiten den aequator, op eene breedte β bij voorbeeld, bevindt zich een punt van de oppervlakte der aarde op eenen afstand

$$r = R \cos. \beta$$

van de as, als R den straal der aarde voorstelt. De daar op dat punt werkende centrifugaalkracht bedraagt dus

$$K = \frac{4 \pi^2 R \cos. \beta}{(86164)^2} m,$$

terwijl, daar de richting dezer kracht met die van de verticaal

evenzoo den hoek β maakt, de werking van de zwaartekracht door haren invloed eene vermindering

$$\frac{4\pi^2 R \cos.^2 \beta}{(86164)^2} m,$$

dus eene aan de tweede macht van den cosinus der breedte evenredige vermindering, ondergaat. Deze was het, waarop wij aan het einde van § 7 doelden.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Over het behoud van arbeids-vermogen.

10. Wanneer onder den invloed van een standvastige kracht $K = m \gamma$ een stoffelijk punt m zich beweegt, zoodat het in de richting van die kracht een baan l aflegt, dan is (I. § 72)

$$K l$$

de arbeid, dien deze kracht verricht.

Is de snelheid in den aanvang a en aan het einde van de baan s , dan zal die baan in

$$t = \frac{s - a}{\gamma}$$

sekonden worden doorloopen, zoodat hare lengte

$$l = \frac{1}{2} \gamma t^2 + a t = \frac{s^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

zijn zal. Substitueert men in deze vergelijking $\gamma = \frac{K}{m}$, dan is

$$l = \frac{s^2 - a^2}{2} \cdot \frac{m}{K}$$

en dus

$$24 \dots \dots K l = \frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2}.$$

Het laatste lid van deze vergelijking leert ons dus de grootte van den door K verrichten arbeid kennen als het verschil van de waarden, die aan het einde en in het begin van de baan l het halve product van de in beweging gebrachte

massa met de tweede macht van de snelheid heeft. Aan dit product heeft men den naam van levendige kracht gegeven.

Vooronderstelt men dus, dat het stoffelijk punt valt door de werking van de zwaartekracht, en dat het op zekere hoogte eene snelheid a en eenigen tijd daarna eene snelheid s heeft, dan zal in dien tijd de aantrekkingskracht een arbeid $\frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2}$ hebben verricht.

De vergelijking (24), die is opgemaakt in de vooronderstelling dat de beweging een gelijkmatig versnellende is, geldt evenzeer als zij een gelijkmatig vertragende en dus $s < a$ en ook $\frac{m s^2}{2} < \frac{m a^2}{2}$ wordt. In dit geval werkt de kracht de oorspronkelijke beweging tegen, geschiedt dus de verplaatsing in eene richting tegenovergesteld aan die van de kracht, zoodat ook de arbeid (I. § 72) negatief

$$-K l = \frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2}$$

is.

In den tijd t wordt dan een weerstands-arbeid $-K l$ overwonnen, maar daarbij daalt dan ook de levendige kracht van $\frac{m a^2}{2}$ tot $\frac{m s^2}{2}$. Onder deze gedaante doet dus onze vergelijking zien, dat een massa, die in beweging is, kan worden gebezigd tot het overwinnen van een weerstand en tevens dat naarmate er weerstands-arbeid wordt overwonnen er levendige kracht verloren gaat.

Wordt $s = 0$, dan is

$$-K l = -\frac{m a^2}{2}$$

en dus de verrichtte arbeid gelijk aan de nu geheel vernietigde levendige kracht.

Aan het product $\frac{m a^2}{2}$ geeft men ook wel eens den naam van arbeids-vermogen en wel dien van arbeids-vermogen van beweging om het te onderscheiden van het arbeids-vermogen van plaats. Dit laatste verschilt van het pro-

duct, dat wij steeds arbeid noemden, alleen in zooverre, dat de daarin voorkomende factor l niet de door eenig lichaam onder den invloed van een kracht werkelijk doorloopen weg voorstelt, maar den weg dien het door zijn bijzondere plaatsing onder dien invloed *kan* doorloopen. Zoo opgevat stelt dan ook dit product inderdaad een arbeids-vermogen voor. Een gewicht van G kil., bij voorbeeld, dat zich op eene hoogte h bevindt, kan ten gevolge van die plaatsing een arbeid $G h$ verrichten bij zijn val; bevond het zich l meters hooger, dan zou zijn arbeids-vermogen ook $G l$ arbeids-eenheden meer bedragen. Als men een boog spant door een kracht K , die het midden van de pees l lengte-eenheden brengt uit zijn stand van evenwicht, dan zal deze door die bijzondere plaatsing alleen een arbeids-vermogen $K l$ bezitten.

Op deze wijze opgevat is de vergelijking (24) de meest eenvoudige uitdrukking van het belangrijk beginsel dat men het behoud van arbeids-vermogen noemt. Zij toch leert — in het geval dat $s > a$ is, — dat het arbeids-vermogen van plaats afneemt naarmate dat van beweging toeneemt, en omgekeerd — als $s < a$ is — dat het arbeids-vermogen van plaats toeneemt, naarmate dat van beweging afneemt. In het eerste geval toch wordt, terwijl bij eene beweging in de richting van de kracht het product $\frac{m a^2}{2}$ toeneemt, de weg, dien de kracht de massa nog *kan* doen doorloopen, in elk geval l lengte-eenheden kleiner. In het laatste daarentegen neemt het product af; maar, aangezien de massa zich daarbij beweegt in eene richting tegenovergesteld aan die waarin de kracht werkt, *kan* deze haar ook weder een baan doen doorloopen die l lengte-eenheden langer is dan te voren.

Een stoffelijk punt wiens gewicht G kil. bedraagt en dat l meters hoog zich bevindt heeft een arbeids-vermogen $G l$. Terwijl het valt neemt dit arbeids-vermogen van plaats voortdurend af, maar gelijktijdig waait dat van beweging van nul tot $\frac{m a^2}{2}$ aan. Komt het neêr, dan is

$$\frac{m a^2}{2} = G l.$$

§ 10. Behoud van arbeids-vermogen bij het stoffelijk punt. 25

Als men dus eene kleine massa zeer hoog ophijst, zal het effect, door het neêrkomen veroorzaakt, niet grooter zijn dan wanneer men eene n -maal grootere massa tot eene n -maal kleinere hoogte had opgevoerd. De grootte toch van dit effect wordt steeds door het product Gl voorgesteld. Eene tegenovergestelde opvatting zou zoowel door den vorm van het product $\frac{m a^2}{2}$ als door den naam levendige *kracht*, die men daaraan heeft gegeven, lichtelijk worden begunstigd. Daar evenwel van eene met de gelijkmatige snelheid a zich bewegende massa m , — waarop dus of geene krachten werken of krachten die in evenwicht zijn — de levendige kracht evenzoo $\frac{m a^2}{2}$ is, moet elke gedachte aan eene door dit product voorgestelde en op de massa werkende vrije kracht uitgesloten worden.

Daar het arbeids-vermogen van de massa als zij neêrkomt Gl is, en men juist een even grooten arbeid zal moeten verrichten om hem tot de hoogte l op te voeren, wordt ook bij deze wijze van krachts-aanwending aan arbeid niets gewonnen.

Wat wij omtrent het behoud van arbeids-vermogen gezegd hebben, in het geval dat de baan van het stoffelijk punt samenviel met de richting waarin de kracht werkt, geldt nog wanneer aan die voorwaarde niet is voldaan. Zij bij voorbeeld gegeven, dat de aanvangs-snelheid een willekeurigen hoek maakt met deze richting, dan kunnen wij haar steeds ontbinden in twee onderling loodrechte, en wel zoo dat de richting van de eene met die van de kracht samenvalt. Is a de grootte van deze ontbondene en s de snelheid van het punt na den tijd t , dan geldt voor deze beweging in de richting der kracht de vergelijking (24)

$$Kl = \frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2}$$

die, van dezelfde gegevens uitgaande, is opgemaakt. Noemen wij de ontbondene in de andere richting b , dan zal zij, daar in die richting de beweging eene gelijkmatige moet zijn, na t sekonden nog b zijn.

Voor deze beweging geldt dus de vergelijking

$$\frac{m b^2}{2} - \frac{m a^2}{2} = 0.$$

Telt men beide vergelijkingen bij elkander op, daarbij be-

26 § 10. Behoud van arbeids-vermogen bij het stoffelijk punt.

denkende dat $a^2 + b^2 = v_0^2$ en $s^2 + b^2 = v^2$ is, als v_0 en v de geheele snelheid in de beide uiteinden der baan voorstellen, dan komt er

$$K l = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}.$$

Daar in het hier vooronderstelde geval het punt in 't algemeen een parabool zal beschrijven, geldt dus het beginsel van het behoud van arbeids-vermogen ook bij die kromlijnige beweging.

Valt het punt door de werking van de zwaartekracht en is zijn massa m , dan zal mg die kracht en dus

$$m g h = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

of

$$g h = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

zijn, als h de projectie is van de baan op de richting van de kracht. Voor de grootte en de snelheid in een punt, dat h meters lager ligt dan het punt van uitgang, geldt dus de vergelijking

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}.$$

Uit haar blijkt, dat die snelheid, daar zij van den vertikalen afstand der punten en van de aanvangs-snelheid alleen afhangt, onafhankelijk is van den weg waar langs de massa van het eene naar het andere punt is gekomen. Het moge dadelijk gedaald of eerst gestegen en daarna gedaald zijn, wanneer in die beide gevallen het evenveel lager zal zijn gekomen en dezelfde aanvangs-snelheid had, zal ook de snelheid aan het einde dezelfde zijn.

Als men in deze vergelijking $h = 0$ stelt volgt uit haar $v = v_0$. Voor een schuins in de hoogte geworpen massa geldt dus ook de waarheid, die wij boven voor een in de richting van de vertikaal opgeworpene bewezen, dat zij in het vlak waarin het punt van uitgang ligt terugkomt met een snelheid gelijk aan die, waarmede zij dat punt verliet. Daar deze voor-

onderstelling tevens $mg h = 0$ maakt, zal de totale arbeid die gedurende de beweging is verricht, *nul* zijn; het arbeids-vermogen van beweging is bij het stijgen geheel omgezet in arbeids-vermogen van plaats, en dit laatste is, terwijl het punt den neergaanden tak der parabool doorliep, weder in arbeids-vermogen van beweging veranderd.

Daar de richting van de centrifugaalkracht steeds loodrecht is op de baan van het stoffelijk punt, dat zich langs den omtrek van een cirkel beweegt, zal de arbeid van die kracht *nul* zijn.

11. Het beginsel, welks geldigheid wij in de vorige § be-
wezen voor het geval dat een stoffelijk punt zich beweegt onder
den invloed van een standvastige kracht, geldt ook nog als
die kracht veranderlijk is. Wij kunnen ons toch voorstellen,
dat de tijd t , gedurende welke zij werkt in zoo kleine deel-
tjes verdeeld is, dat zij gedurende een van die tijdsdeeltjes
dezelfde blijft. Gedurende elk dier deeltjes is dan de door de
kracht verrichtte arbeid gelijk aan de toename van de levendige
kracht van het punt; dus is zij daaraan ook gelijk gedurende
de gansche beweging, die in de som dier tijdsdeeltjes wordt
uitgevoerd.

Daarenboven is alles, wat omtrent het behoud van arbeids-
vermogen bij de beweging van een stoffelijk punt is afgeleid,
van toepassing op de beweging van een willekeurig lichaam,
wanneer wij dit, evenals vroeger, voorloopig beschouwen als
te bestaan uit een groot aantal op onveranderlijke wijze aan
elkander verbonden stoffelijke punten. Dit verband bestaat door
de werking der zoogenaamde inwendige krachten, die
de aan elkander grenzende punten wederkeerig uitoefenen. Be-
weegt zich een lichaam evenwijdig aan zich zelf, dus zonder
te draaien, dan zullen de projectiën van de banen van twee
punten op de richting van de hen verbindende kracht gelijk zijn.
Volgens de vooronderstelling toch, zijn zij op onveranderlijke
wijze aan elkander verbonden, zoodat zij ten opzichte van
elkander zich niet bewegen. Daarenboven is de richting van de
kracht, die het eene punt op het andere uitoefent, lijnrecht

tegenovergesteld (I. § 19) aan die van de kracht, waarmee dit laatste op het eerste terugwerkt, terwijl beide in grootte aan elkander gelijk zijn. De absolute grootte van den arbeid, die beide verrichten, is dus dezelfde. Daar de krachten echter in tegenovergestelden zin werken, zal, als de arbeid van de eene positief is, die van de andere negatief, en dus de som van beide *nul* zijn.

Evenzoo zal die arbeid nul zijn als het eene punt draait om het andere. De arbeid van de kracht, die op het laatstgenoemde werkt, is nul omdat dit zich niet beweegt, en die van de op het eerstgenoemde werkende omdat de kracht steeds loodrecht op de baan is.

Daar men nu elke willekeurige beweging van een lichaam kan beschouwen als de resultante van eene ronddraaiende en eene die gelijktijdig plaats heeft, en waarbij het evenwijdig aan zich zelf wordt verplaatst, zal in het algemeen de som van de arbeids-eenheden, die de inwendige krachten verrichten, nul zijn.

Noemen wij nu den arbeid van de resultante der uitwendig op een zijner punten werkende krachten A en die van de inwendig daarop werkende A' , dan zal in het algemeen voor dit punt de vergelijking

$$\frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2} = A + A'$$

gelden. Voor de op alle punten werkende krachten zal dus

$$\Sigma \left(\frac{m s^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m a^2}{2} \right) = \Sigma (A) + \Sigma (A')$$

of, daar $\Sigma (A') = 0$ is,

$$\Sigma \left(\frac{m s^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m a^2}{2} \right) = \Sigma (A)$$

zijn.

De toename van de levendige kracht is dus bij de willekeurige beweging van een lichaam steeds gelijk aan den arbeid van alle van buiten daarop werkende krachten.

12. De grootte van de levendige kracht van een lichaam, dat eene ronddraaiende beweging heeft om een as, is moeilijker te bepalen dan die van een lichaam, dat evenwijdig aan zich zelf zich beweegt. Terwijl in laatstgenoemd geval alle punten dezelfde snelheid hebben, neemt deze in het eerstgenoemde toe met den afstand, waarop zich een punt van die as bevindt. Is toch ω de hoeksnelheid dan is (§ 8) de snelheid van een punt, dat zich op een afstand r van die as bevindt, $s = r \omega$, die van een punt wiens afstand r' meters bedraagt $s' = r' \omega$, enz.; zoodat, als van het eene punt de levendige kracht $\frac{m r^2 \omega^2}{2}$ is, die van het andere $\frac{m r'^2 \omega^2}{2}$ zal zijn. De levendige kracht van het geheele lichaam wordt dus door

$$L = \Sigma \left(\frac{m r^2 \omega^2}{2} \right) = \frac{\omega^2}{2} \Sigma (m r^2)$$

voorgesteld, en zij zal slechts bekend zijn, wanneer men van de som $\Sigma (m r^2)$, die van de verdeeling der stof om de as afhangt, de waarde weet te bepalen. Aan deze som heeft men den naam van traagheids-moment van het lichaam ten opzichte van de as gegeven. Stelt men haar door T voor, dan is

$$L = \frac{\omega^2 T}{2}$$

de uitdrukking voor de levendige kracht van het ronddraaiende lichaam wiens hoeksnelheid ω is.

Bevinden zich alle stofdeelen op denzelfden afstand van de as, dan wordt in $\Sigma (m r^2)$ de waarde van r standvastig, zoodat in dat geval

$$T = r^2 \Sigma (m) = M r^2$$

zijn zal. Hieruit volgt, dat men het traagheids-moment van eenig lichaam zal kennen, zoodra men de grootte van de massa weet te bepalen, die op zekeren afstand r van de as van omwenteling moet geplaatst worden, om ten opzichte van die as een traagheids-moment te hebben gelijk aan dat van het lichaam zelf. Deze massa wordt dan de tot den afstand r geredu-

ceerde massa van het lichaam genoemd. Onder de verschillende massa's, die, doordien zij op verschillende afstanden worden geplaatst, aan deze voorwaarde kunnen voldoen, is ook de massa van het lichaam zelf. De afstand ρ , waarop deze, in één punt geconcentreerd gedacht, zich van de as moet bevinden, indien het product $M \rho^2$ aan het traagheids-moment van het lichaam gelijk zal zijn, noemt men den traagheids-straal van het lichaam.

Is het lichaam, wiens traagheids-moment men wil bepalen, homogeen, dan bevatten de verschillende onder het teeken Σ voorkomende waarden van m denzelfden factor d , zoodat in dit geval

$$T = d \Sigma (v r^2)$$

zijn zal, als v een volume-element voorstelt. Denkt men zich de stof gelijkmatig verdeeld over eene vlakke-uitgebreidheid, dan zal voor T nog dezelfde uitdrukking gelden, als daarin v een vlakke-element beteekent. In dit laatste geval nu is $\Sigma (v r^2)$ de vorm, dien wij vroeger (I. § 79) onder den naam van buigings-element leerden kennen en wier waarde wij in eenige bijzondere gevallen bepaalden. Uit de daar geleverde beschouwingen blijkt, dat van een zeer dunne rechthoekige homogene plaat, wier inhoud $b h$ is, het traagheids-moment ten opzichte van eene aan de zijde b evenwijdige en door het zwaartepunt gaande as

$$T = d \frac{b h^3}{12}$$

en dat van eene dergelijke cirkelvormige plaat ten opzichte van de middellijn

$$T = d \frac{1}{4} \pi r^4$$

zijn zal.

In de aangehaalde § werd ook de vergelijking afgeleid, waardoor het buigings-element ten opzichte van eene as tot dat ten opzichte van eene aan haar evenwijdige door het zwaartepunt gaande as kan herleid worden. Uit het traagheids-moment van de deelen eens lichaams, ten opzichte van door hunne zwaartepunten gaande assen, zal men op dezelfde wijze tot dat moment

ten opzichte van eene door het gemeenschappelijk zwaartepunt gaande en aan de eerste evenwijdige as kunnen besluiten.

13. Vooronderstellen wij thans, dat een lichaam met veranderlijke snelheid om een as draait en wel zóó, dat de hoeksnelheid ω in den tijd t de waarde ω_1 verkrijgt. Noemen wij den arbeid, dien de op het lichaam werkende krachten daartoe in den tijd t verrichten, A, dan zal (§ 11)

$$\frac{T \omega_1^2}{2} - \frac{T \omega^2}{2} = A$$

zijn.

Noemen wij de tot den afstand R gereduceerde massa des lichaams M, dan zal

$$T = \Sigma (m r^2) = M R^2$$

zijn, zoodat de vergelijking

$$\frac{M R^2 \omega_1^2}{2} - \frac{M R^2 \omega^2}{2} = A$$

wordt, waarvoor wij ook

$$\frac{M v^2}{2} - \frac{M v_0^2}{2} = A$$

kunnen schrijven, als v_0 en v de lengten voorstellen van de bogen, die de op den afstand R van de as gelegen punten van het lichaam in de eenheid van tijd doorloopen.

DERDE HOOFDSTUK.

Over de beweging van een lichaam om een vaste as.

14. Wanneer in een punt van een lichaam een kracht K aangrijpt, dan is deze niet de eenige kracht, die op dat punt werkt. Met de overige punten van het lichaam toch is het verbonden, en dit verband bestaat doordien van de overige punten krachten uitgaan (§ 11), die op het beschouwde punt werken. Kende men de resultante I dezer inwendige krachten, dan zou men de wijze, waarop zich het punt bewegen zal, kunnen bepalen. Het zou dan als een vrij punt zich bewegen, zoodat, als m zijn massa en $R = m \gamma$ de resultante van K en I is, zijne versnelling

$$\gamma = \frac{R}{m},$$

en met haar de wijze waarop het zich bewegen moet, gegeven zijn zal.

Ofschoon men nu niet de grootte van I en dus evenmin die van $R = m \gamma$ kent, is het toch duidelijk, dat zoo men in het punt eene kracht $-m \gamma$ liet aangrijpen het in rust zou blijven. Dan toch werkten inderdaad op dat punt de bekende kracht K , de onbekende kracht I en eene aan de resultante van beide tegenovergestelde kracht $-m \gamma$. Door bemiddeling van de inwendige krachten moet er dus altijd evenwicht zijn tusschen de krachten K en $-m \gamma$.

Daar nu hetzelfde geldt voor elk ander punt van het lichaam

zal aan de algemeene voorwaarden van evenwicht moeten voldaan zijn, als men daarin zoowel alle van buiten aangrijpende krachten invoert als de met omgekeerd teeken genomen krachten $m\gamma$, $m'\gamma'$ enz., die in staat zouden zijn om, alleen werkende, aan de punten van het lichaam de werkelijk plaats grijpende beweging mede te deelen. De waarden der onbekenden γ , γ' , enz. kunnen dan door middel van deze vergelijkingen en met behulp van de vergelijkingen, die het onderling verband der punten bepalen, worden opgelost, en met haar is de beweging van het gansche samenstel van punten gegeven.

De in de genoemde evenwichts-voorwaarden vervatte waarheid wordt het *principe van D'ALEMBERT* genoemd. Kortelijk is dus zijn inhoud deze:

gedurende de beweging van een stelsel van op onveranderlijke wijze verbonden punten zijn, door bemiddeling van dat verband zelf, de van buiten daarop werkende krachten voortdurend in evenwicht met de traagheids-weerstanden die elk der punten biedt.

15. Passen wij het principe van D'ALEMBERT toe op een lichaam, dat onder den invloed van eenige standvastige krachten draait om een vaste as, dan zal de evenwichts-voorwaarde moeten uitdrukken, dat ten opzichte van die as het moment van de krachten, die op de verschillende punten van het lichaam werken, aan dat van de traagheids-weerstanden dier punten gelijk is. Onder den invloed dier standvastige krachten zal het lichaam zich met gelijkmatige versnelling bewegen. Noemt men deze versnelling, dat is hier de toename van de hoeksnelheid in eene sekonde, γ , dan zal $r\gamma$ de versnelling zijn waarmede het punt, als het op een afstand r van de as ligt, zijn baan doorloopt. De traagheids-weerstand, dien het punt tegen de beweging langs die baan biedt, zal, als het een massa m heeft, door $m r \gamma$, en zijn moment ten opzichte van de as door $m r^2 \gamma$ worden voorgesteld. Want de andere samenstellende van den ganschen traagheids-weerstand, de in de richting van de normaal werkende centrifugaal-kracht, heeft, daar hare

richting door de as gaat, ten haren opzichte een moment *nul*. Het moment van den traagheids-weerstand van eenig ander punt zal evenzoo $m' r'^2 \gamma$ zijn. Derhalve is $\Sigma (m r^2 \gamma) = \gamma \Sigma (m r^2)$ de uitdrukking van het moment der traagheids-weerstanden van het gansche lichaam; voor haar kan men ook γT schrijven, omdat (§ 12) $\Sigma (m r^2)$ het traagheids-moment van het lichaam is. Is dus K een willekeurige aan eenen hefboomsarm l werkende kracht, dan zal volgens bovengenoemd principe

$$\Sigma (K l) - \gamma T = 0$$

en dus

$$\gamma = \frac{\Sigma (K l)}{T}$$

zijn.

Zijn de op het lichaam werkende krachten veranderlijk, dan zal de ronddraaiende beweging ook niet gelijkmatig versnellend en dus γ geene standvastige grootheid zijn. *Op een bepaald tijdstip* echter heeft γ eene bepaalde waarde en evenzoo de traagheids-weerstand $\Sigma (m r^2 \gamma)$ van het lichaam. Voor dat tijdstip geldt dus de vergelijking

$$25 \dots \dots \gamma = \frac{\Sigma (K l)}{T}$$

evenzeer, wanneer daarin maar aan de onder het teeken Σ voorkomende, alsdan veranderlijke, grootheden K en l de waarden worden toegekend, die zij op dat tijdstip hebben.

In het algemeen dus is

de versnelling, die een om een vaste as draaiend lichaam op eenig oogenblik heeft ten gevolge van de alsdan daarop werkende krachten, gelijk aan het quotient dat men verkrijgt, als de som van de statische momenten dier krachten ten opzichte van die as door het traagheids-moment van het lichaam gedeeld wordt.

16. De zoo even verkregen uitkomst vindt eene voorname toepassing bij het bepalen van de beweging des slingers.

Door een eenvoudigen of mathematischen slinger verstaat men een stoffelijk punt, dat, opgehangen aan een draad

die niet buigbaar, niet rekbaar en zonder gewicht is, zich om dat ophangpunt kan bewegen, zonder dat er bij die beweging wrijving wordt veroorzaakt.

Bevindt dat stoffelijk punt zich in de vertikaal onder het ophangpunt, dan is de slinger in stabiel evenwicht. Brengt men hem uit dien stand en laat men hem dan aan zich zelf over, dan zal hij daarin trachten terug te keeren. Daar hij echter met eene zekere snelheid in den stand van evenwicht aankomt, zal hij daardoor heengaan, en de zwaartekracht, die tot dat oogenblik versnellend werkte, zal de beweging gaan vertragen. Deze zal ten laatste geheel ophouden. Maar in den stand, dien de slinger dan heeft, kan hij niet in rust blijven; de zwaartekracht zal hem naar zijn evenwichts-stand terugvoeren en de schommelingen (oscillaties) als de zoo even beschrevene om dien stand zullen, als men den tegenstand van de lucht buiten rekening laat, steeds moeten voortduren. Want telkens als de slinger in rust is, zal hij niet in evenwicht zijn, terwijl hij niet in rust is als hij den stand bereikt waarbij hij in evenwicht zijn kan.

De baan, die het stoffelijk punt doorloopt om van het eene rustpunt tot het andere te komen, noemt men eene schommeling, den tijd waarin die baan doorloopen wordt een schommelingsduur, den hoek, dien de slinger in den toestand van rust maakt met de vertikaal van het ophangpunt, den doorslag, en het dubbel van dien hoek de schommelings-wijdte of amplitudo.

Zij nu (Fig. 73) $OA = OE = OB = l$ de lengte van den slinger, $DB = h$ de vertikale afstand tussehen de uiteinden van den doorslag, en EF een zoo klein deeltje van de baan AB , dat men de snelheid, waarmede het doorloopen wordt, constant mag stellen. Noemt men deze snelheid v , en stelt men $DM = z$, dan is $v = \sqrt{2gz}$. De tijd t' , die bij het doorloopen van EF verstrijkt, is dan

$$t' = \frac{EF}{\sqrt{2gz}}.$$

Ter bepaling van EF construeere men op $BD=l$ als middellijn een halven cirkel en trekke in horizontale richting de lijnen EM en FN en in vertikale richting de lijnen GF en KL .

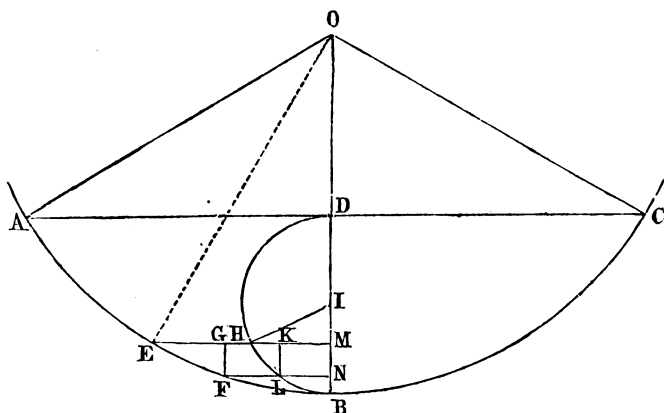


Fig. 73.

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken EFG en OEM volgt dan:

$$EF:GF = OE:EM = l:EM$$

en dus

$$EF = l \frac{GF}{EM} = l \frac{KL}{EM}$$

Maar uit de gelijkvormige driehoeken HKL en IHM volgt, dat

$$HL:KL = IH:HM = \frac{1}{2} l:HM$$

en dus

$$KL = \frac{2 \cdot HM \cdot HL}{l}$$

is, zoodat

$$\begin{aligned} EF &= \frac{2l}{l} \cdot HI \cdot \frac{HM}{EM} = \frac{2l}{l} \cdot HI \cdot \sqrt{\frac{MB \cdot MD}{MB(2OB - MB)}} = \dots \\ &= \frac{2l}{l} \cdot HI \cdot \sqrt{\frac{z}{2l - MB}} \end{aligned}$$

zijn zal.

Substitueert men deze waarde van $E F$ in die van t' , dan wordt deze

$$t' = \frac{2l}{h} H L \sqrt{\frac{1}{2g \cdot (2l - MB)}}.$$

Zijn de schommelingen, die men beschouwt, zeer klein, dan is voor elk punt der baan $A B$ de waarde van $M B$ ten opzichte van $2l$ zeer klein. In die vooronderstelling zal dus

$$t' = \frac{2l}{h} H L \sqrt{\frac{1}{4gl}} = \frac{H L}{h} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

zijn.

Had men een boogje $E' F'$ ergens anders op den cirkelboog $A B$ genomen, dan zou men voor t' eene uitdrukking hebben verkregen, waarin $\sqrt{\frac{l}{g}}$ met een ander, tusschen de door E' en F' gaande horizontale lijnen gelegen, gedeelte van den halven cirkel $D H L B$ was vermenigvuldigd. De halve schommelingsduur $\frac{1}{2} t$, die uit de som der kleine tijddeeltjes t' bestaat, zal dus den halven cirkel $\frac{1}{2} \pi h$ tot factor hebben, zoodat

$$\frac{1}{2} t = \frac{\frac{1}{2} \pi h}{h} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

en dus

$$26 \dots \dots t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

zijn zal.

Van den duur van kleine schommelingen van den mathematischen slinger zal dus $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ de uitdrukking zijn; zij leert, dat, binnen de grenzen, waarvoor deze benaderde waarde van t geldt, die duur niet afhangt van de schommelingswijde.

Uit de wijze, waarop de benadering is geschied, blijkt, dat de nauwkeurige waarde van t iets grooter dan $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ moet zijn. Had zich het stoffelijk punt langs een boog eener cycloïde bewogen — d. i. langs de kromme lijn, die beschreven wordt door een punt van een cirkelomtrek, als die langs een

rechte lijn rolt — dan zal, als l het dubbel is van de middellijn des beschrijvenden cirkels, $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ eene nauwkeurige uitdrukking zijn voor den schommelingsduur, hoe groot ook de wijidte der schommelingen zijn moge. In dit geval geschieden dus alle schommelingen, groote zoowel als kleine, in volkomen denzelfden tijd. (Isochronisme).

Wanneer een lichaam alleen door de werking van de zwaartekracht zich van een punt moet bewegen naar een ander, dat met het eerste niet in dezelfde vertikaal ligt, dan zal het in dit laatste in den kortst mogelijken tijd aankomen, als het zich beweegt langs den boog van eene cycloïde met horizontale richtlijn, die de punten verbindt. (Brachistochronische kromme).

De vergelijking $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ leert in de eerste plaats, dat, voor schommelingen, die slechts geringe amplitudo hebben, aan dezelfde plaats op aarde de schommelingsduur, bij slingers van verschillende lengte, evenredig is met de tweede machts-wortels uit die lengten.

Want, daar in de voor beide slingers geldende formules, $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ en $t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$, in dit geval g dezelfde waarde heeft, zal

$$t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$$

zijn.

In de tweede plaats kan, volgens die formule, de verhouding tusschen de grootten der aantrekkingen die de aarde aan verschillende plaatsen van hare oppervlakte uitoeft, worden afgeleid uit de grootte, die de schommelingsduur van denzelfden slinger aan die plaatsen heeft. Want uit de voor die plaatsen geldende formules $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ en $t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$, waarin nu l dezelfde waarde heeft, volgt

$$t : t' = \sqrt{g'} : \sqrt{g}$$

of

$$g' : g = t^2 : t'^2;$$

zoodat de grootten van die aantrekkingen omgekeerd evenredig zijn met de tweede machten van den schommelingsduur.

Bepaling van de gedaante der aarde uit slingerproeven.

Voor eene plaats op aarde waar $g = 9.812 \dots$ is, zal

$$l = \frac{1^2 \cdot 9.812}{\pi^2} = 0.9942 \dots$$

de lengte zijn van den sekonden-slinger, d. i. van den slinger, wiens kleine schommelingen ééne sekonden duren. De verhouding tusschen de lengten van de sekonden-slingers aan verschillende plaatsen op aarde zal tevens de verhouding zijn tusschen de waarden, die daar aan g moeten worden toegekend.

17. Elk lichaam dat om een horizontale vaste as draaien kan, die niet door het zwaartepunt gaat, is een physische slinger. De beweging, die de verschillende punten, waaruit hij bestaat, hebben onder den invloed der zwaartekracht, kan beschouwd worden als die van zoovele mathematische slingers, die allen, als zij vrij waren, hunnen eigenen met den afstand van het zwaartepunt overeenkomstigen schommelingsduur zouden hebben. Daar zij tot één lichaam verbonden zijn, oefent de beweging van het eene punt invloed uit op die van het andere; toch zal er onder die allen één punt zijn, dat zich beweegt op de wijze waarop het dit zou doen, als het geheel alleen een mathematischen slinger vormde.

De mathematische slinger, wiens lengte met den afstand van dit punt tot de as overeenkomt, zal dus, als alle andere omstandigheden gelijk zijn, steeds in denzelfden bewegings-toestand verkeerden als de physische slinger zelf. Worden beide gelijktijdig in beweging gebracht en wijken zij daarbij evenveel af van den stand van evenwicht, dan zullen zij ook later, op elk willekeurig oogenblik, bij denzelfden doorslag α dezelfde versnelling γ hebben.

Deze beschouwing geeft een middel aan de hand om door berekening de lengte van den mathematischen slinger te bepalen, die met een gegeven physischen slinger overeenkomt. Zij toch m' de massa van deze, T_a zijn traagheids-moment ten opzichte van de as en r de afstand van deze tot het zwaarte-

punt, dan is $m'g$ de in het zwaartepunt aangrijpende beweegkracht en $r \sin \alpha$ haar hefboomsarm, zoodat (§ 15)

$$\gamma = \frac{m' g r \sin \alpha}{T_a}$$

zijn zal.

Van den mathematischen slinger, die bij den doorslag α dezelfde versnelling heeft, moet, als m de massa is van het stofelijk punt, de lengte l voldoen aan de vergelijking

$$\gamma = \frac{m g l \sin \alpha}{m l^2}$$

omdat (§ 12) $m l^2$ het traagheids-moment is van het punt m ten opzichte van de as.

De gelijkstelling van beide waarden geeft

$$\frac{m' g r \sin \alpha}{T_a} = \frac{g \sin \alpha}{l};$$

waaruit

$$27 \dots \dots \dots l = \frac{T_a}{m' r}.$$

De schommelingsduur van den physischen slinger zal dus

$$t = \pi \sqrt{\frac{T_a}{m' g r}}$$

zijn.

Het punt van een physischen slinger, dat op een afstand van de as is verwijderd gelijk aan de lengte van den in schommelingsduur met hem overeenkomenden mathematischen slinger, en op de loodlijn ligt, die uit het zwaartepunt op de as is neêr-gelaten, noemt men het middelpunt van schommeling.

De ligging van dit middelpunt van schommeling is nog daardoor merkwaardig dat

de schommelingsduur van een slinger niet verandert, als hij zich in plaats van om de oorspronkelijke as beweegt om eene, die aan haar evenwijdig is en door het middelpunt van schommeling gaat.

Zij toch l' de lengte van den mathematischen slinger, die

met den dus omgekeerden fysischen slinger overeenkomt, T_m zijn traagheids-moment ten opzichte van de nieuwe as, dan zal, daar $l - r$ de afstand is van het zwaartepunt tot die as, (vergel. 27)

$$28 \dots\dots l' = \frac{T_m}{m'(l-r)}$$

zijn.

Reduceert men in de vergelijkingen (27) en (28) het traagheids-moment tot het moment T_z ten opzichte van eene door het zwaartepunt gaande evenwijdige as, dan wordt de eerste (§ 12)

$$l = \frac{T_z + m' r^2}{m' r}$$

en de tweede

$$l' = \frac{T_z + m' (l - r)^2}{m' (l - r)}.$$

De uit de uitdrukkingen voor l en l' voortvloeiende waarden van T_z moeten, daar zij het traagheids-moment van hetzelfde lichaam ten opzichte van dezelfde as voorstellen, aan elkander gelijk zijn; en zij kunnen dit slechts als

$$l = l'$$

is.

Op grond van deze eigenschap van den fysischen slinger kan men, bij het doen van slingerproeven, bijv. ter bepaling van de waarde van g , de uitdrukking voor l , die in de formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

moet gesubstitueerd worden, nauwkeuriger bepalen, dan door eene vergelijking van de schommelingen met die van eenen, steeds slechts onvolkomen daar te stellen, mathematischen slinger. Neemt men toch nauwkeurig de beweging van eenen slinger waar en zoekt men, na hem te hebben omgekeerd, de ligging van de as waarvoor de schommelingsduur dezelfde blijft, dan zal de afstand van deze beide assen de waarde van l zijn. Reversie-slinger.

De waarde van l zal men slechts door middel van de vergelijking (27) kunnen bepalen, als die van T_a reeds vooraf be-

kend is, en dit is slechts bij zeer weinige lichamen het geval. Juist deze vergelijking is het, die alleen tot eene juiste kennis van de traagheids-momenten van onregelmatige lichamen ten opzichte van elke willekeurige as kan leiden. Laat men eenig lichaam om zulk een as schommelen en zoekt men daarna, door het als reversie-slinger te bezigen, het middelpunt van schommeling op, dan zal de waarde van l in de genoemde vergelijking bekend worden. Daar $m'r$ in haar evenzoo gegeven is zal men dan T_a uit haar kunnen oplossen.

Bij al deze proefnemingen moet men er wel op letten, dat er op het verlengde van de loodlijn, die uit het zwaartepunt op de as is neêr gelaten, op denzelfden afstand van dit punt als deze een ander punt ligt, dat men lichtelijk met het middelpunt van schommeling zou verwarren. Laat men toch door dit punt een as gaan evenwijdig aan de eerste, dan zal, daar alsdan in vergelijking (27) de waarden van T_a en r onveranderd blijven, de slinger om die as zich op dezelfde wijze bewegen als om de oorspronkelijke.

18. Als (Fig. 74) aan den omtrek van een wiel, wiens straal

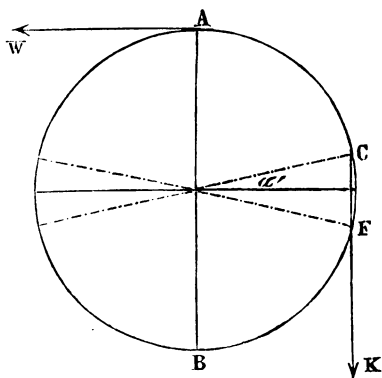


Fig. 74.

r meters lang is, een weerstand W werkt, dan zal het moment van dien weerstand ten opzichte van die as steeds door $W r$ worden voorgesteld. Wil men dien weerstand overwinnen door een kracht K , die, aangrijpende aan het uiteinde van een op

de as bevestigenden kruk, trekt terwijl dat uiteinde den halven cirkel-omtrek $A C F B$ doorloopt, en drukt bij het doorloopen van $B D E A$, dan zal van deze kracht het veranderlijk moment $K r \cos \alpha$ zijn. De ronddraaiende beweging zal onder den invloed van deze kracht met veranderlijk en van dien weerstand met standvastig moment, noodzakelijk eene ongelijkmatige zijn. Daar echter bij elke halve omwenteling het moment der kracht steeds dezelfde waarden in dezelfde volgorde doorloopt, zullen bij elke halve omwenteling volkomen dezelfde toestanden van beweging elkander opvolgen, als maar de snelheid in twee diametraal tegenovergestelde punten van den omtrek steeds dezelfde is. En dit zal zoo zijn, als de arbeid, dien de kracht verricht bij het doorloopen van een halven omtrek, wordt opgeheven door dien van den weerstand, als dus

$$K \cdot 2 r - W \pi r = 0$$

of

$$29 \dots\dots\dots K = \frac{\pi}{2} W$$

is.

Wordt aan deze vergelijking voldaan, dan bereikt gedurende eene halve omwenteling de snelheid in een punt een maximum en daalt zij in een ander punt tot een minimum. Want een maximum moet bereikt worden op het oogenblik, dat het moment van de kracht ophoudt dat van den weerstand te overtreffen, een minimum in het tegenovergesteld geval. In beide gevallen zijn de twee momenten aan elkander gelijk, zoodat de ligging van beide punten bepaald wordt door de vergelijking

$$K r \cos. \alpha' = W r$$

of, (vergel. 29) door

$$\frac{\pi}{2} W \cos. \alpha' = W$$

waaruit

$$\cos. \alpha' = \frac{2}{\pi}.$$

Laten C en F de punten zijn, wier ligging door deze waarde van $\cos. \alpha$ bepaald is, dan zal de snelheid in C een minimum

en in F een maximum zijn, want het moment van K neemt van C tot F voortdurend toe. Noemen wij dus S de snelheid in F, s die in C, dan zal de grootte van de ongelijkmatigheid door $S - s$ worden voorgesteld. Maar terwijl de snelheid van s tot S stijgt, verricht de kracht een arbeid $2 K r \sin. \alpha'$, terwijl gelijktijdig de weerstand den arbeid $2 W r \alpha'$ ontwikkelt. Derhalve is (§ 13)

$$\frac{S^2}{2} T - \frac{s^2}{2} T = 2 K r \sin. \alpha' - 2 W r \alpha'$$

of, (vergel. 29)

$$(S - s) \cdot \frac{S + s}{2} \cdot T = W r (\pi \sin \alpha' - 2 \alpha').$$

In deze vergelijking is $\frac{S + s}{2}$ de gemiddelde snelheid en $S - s$ het grootste verschil in snelheid. Wil men dat dit laatste slechts een bepaald gedeelte, een n^e deel bij voorbeeld, van de gemiddelde snelheid zij, dan zal men T zoo moeten kiezen, dat $\frac{S + s}{2} : S - s = n$ of $(S - s) \frac{S + s}{2} = \left(\frac{S + s}{2}\right)^2 : n$ zij. En aan deze voorwaarde zal voldaan zijn, als

$$30 \dots T = \frac{n}{\left(\frac{S + s}{2}\right)^2} \cdot W r (\pi \sin. \alpha' - 2 \alpha')$$

is. In deze vergelijking heeft α' de uit $\cos. \alpha' = \frac{2}{r}$ voortvloeiende waarde. Zijn de stralen van de omtrekken, die de aangrijpings-punten van K en W doorloopen, niet even groot, dan zal men den weerstand tot zulk een bedrag kunnen reduceeren, dat het is alsof beide stralen gelijk zijn.

De vergelijking (30) leert ons, dat men het ongelijkmatige van de snelheid eener ronddraaiende beweging tot een willekeurig gedeelte van de gemiddelde snelheid kan terugbrengen, door de ronddraaiende massa zoo in te richten, dat het traagheids-moment eene daarmede overeenkomstige waarde heeft. **Vliegwiél.**

19. Gelijkmatic ronddraaiende beweging van een vaste as

heeft plaats bij den centrifugaal-slinger. In deze gaat de mathematische slinger over als het stoffelijk punt eenen in een horizontaal vlak gelegen cirkel met gelijkmatige snelheid doorloopt. De draad zal alsdan den mantel beschrijven van een rechten cirkelvormigen kegel en daarbij met de door het op-hangpunt gaande vertikaal een hoek maken, dien men den hoek van elongatie noemt.

Zij (Fig. 75) $OA = l$ de lengte van den centrifugaal-slinger,

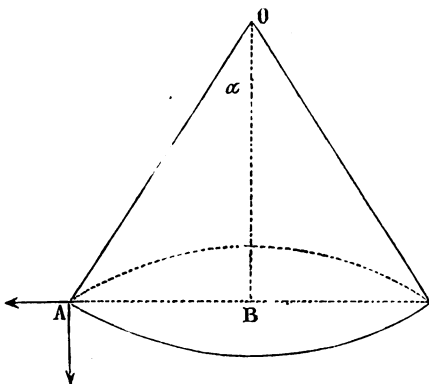


Fig. 75.

α de elongatie-hoek bij gelijkmatige ronddraaiende beweging, ω de hoeksnelheid van het zware punt A en m de massa van dit punt, dan is (§ 8)

$$K = m \cdot A B \cdot \omega^2 = m l \sin. \alpha \omega^2$$

de grootte van de daarop werkende centrifugaal-kracht. Deze heeft ten opzichte van het punt O een moment

$$K \cdot O B = m l \sin. \alpha \omega^2 l \cos. \alpha = m l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \omega^2,$$

terwijl het gewicht mg van het stoffelijk punt ten opzichte van O

$$m g \cdot A B = m g \cdot l \cdot \sin. \alpha$$

tot moment heeft. Zal het punt met gelijkmatige snelheid zich bewegen dan is het dus noodig, dat

$$m l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \omega^2 = m g l \sin. \alpha$$

of

$$\cos. \alpha = \frac{g}{l \omega^2}$$

zij.

Bij eene gegevene lengte en omwentelings-snelheid van den centrifugaal-slinger zal deze dus slechts bij de door deze vergelijking bepaalde elongatie in evenwicht zijn.

Uit die vergelijking volgt nog

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos. \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{OB}}$$

De lengte van den schommelingsduur t , dat is van den tijd waarin den ganschen cirkel-omtrek wordt doorloopen, zal dus

$$t = \frac{2\pi r}{\omega r} = 2\pi \sqrt{\frac{OB}{g}}$$

zijn; zoodat de schommelingsduur van den eenvoudigen centrifugaal-slinger juist het dubbel is van dien van een mathematischen slinger, wiens lengte gelijk is aan de hoogte van den kegel, door den draad bij het omwentelen beschreven.

Eene toepassing van den centrifugaal-slinger is de reguleur der stoommachines. De eenvoudigste onder deze, die van WATT, bestaat in de hoofdzaak uit twee volkomen gelijke centrifugaal-slingers, die ten opzichte van de as OB symmetrisch geplaatst zijn. Door deze plaatsing wordt de werking van de centrifugaal-kracht der beide massa's op de as opgeheven.

Is n het aantal omwentelingen van die as in eene minuut, dan is $\frac{2\pi r \cdot n}{60}$ de weg, dien A aflegt in eene sekonde, en dus

$\omega = \frac{2\pi n}{60}$ de hoeksnelheid. Bij gelijkmatige beweging der massa's A zal dus de grootte van den elongatie-hoek bepaald zijn door de vergelijking

$$\cos. \alpha = \frac{3600 g}{4 \pi^2 n^2 l} = \frac{900 g}{\pi^2 n^2 l},$$

uit welke blijkt, dat de elongatie-hoek sterk toeneemt, wanneer het aantal omwentelingen per minuut grooter wordt, en dat de grootte van dien hoek niet afhangt van die der massa's A.

Wil men dat bij den regelmatigigen gang der machine de as OB in eene minuut n omwentelingen volbrengt, dan zal men den reguleur zoo moeten inrichten, dat de hoeveelheid stoom dit aantal omwentelingen veroorzaakt, als de massa's A een afstand $l \cos. \alpha = \frac{900 g}{\pi^2 n^2}$ van de as OB hebben. Bij de onregelmatigheden, die het overwinnen van de weerstanden in den gang der machine veroorzaakt, zal dan de grootte van den elongatie-hoek steeds om de met den regelmatigigen gang overeenkomstige waarde varieeren.

20. Als voorbeeld van eene tegelijk voortgaande en ronddraaiende beweging willen wij alleen het eenvoudig geval beschouwen, dat een homogene cilinder onder den invloed van zijn eigen gewicht van een hellend vlak rolt.

Zij mg zijn gewicht, r zijn straal en α de hoek, dien het hellend vlak maakt met den horizon, dan is $mg \sin. \alpha$ de in het zwaartepunt aangrijpende kracht, die rechtstreeks er toe bijdraagt om het lichaam te bewegen. Behalve deze kracht werkt nog op den cilinder de normale weerstand en de aan haar evenredige wrijving $F = mg \cos. \alpha \cdot f$. De laatste grijpt aan in het oppervlak van den cilinder; verplaatst men haar evenwijdig aan zich zelve naar de as, dan ontstaat er een koppel $F r$ dat den cilinder tracht te draaien naar denzelfden kant als waarheen de beweging plaats heeft. — Zal deze eene zuiver rollende en niet gedeeltelijk eene glijdende zijn, dan zullen de versnellingen van de voortgaande en van de ronddraaiende beweging gelijk moeten wezen. Noemen wij haar γ dan is $\frac{\gamma}{r}$ de versnelling van de hoeksnelheid en dus (§ 15) de kracht F bepaald door de vergelijking

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{F r}{T}$$

waaruit

$$F = \gamma \frac{T}{r^2}.$$

In het zwaartepunt grijpen dus nu de krachten $mg \sin. \alpha$

en $-\gamma \frac{T}{r^2}$ aan, terwijl, wegens de gelijkheid der beide versnellingen, $m\gamma$ de evenzoo in dat punt aangrijpende traagheidsweerstand van de homogene massa zijn zal. Volgens het principe van D'ALEMBERT wordt dus de versnelling bepaald door de vergelijking

$$m g \sin. \alpha - \gamma \frac{T}{r^2} = m \gamma$$

waaruit

$$\gamma = \frac{m g r^2 \sin. \alpha}{m r^2 + T}.$$

Wil men dat aan de voorwaarde, dat de beweging niet gedeeltelijk eene glijdende zijn mag, voldaan zij, dan moet de wrijvingsweerstand de waarde $\gamma \frac{T}{r^2}$ kunnen bereiken. Daar nu de waarde, die zij bereiken kan, hoogstens $m g \cos. \alpha f$ is, zal de hoek α zoo groot moeten zijn, dat

$$m g \cos. \alpha f > \gamma \frac{T}{r^2}$$

of

$$m g \cos. \alpha f > \frac{m g \sin. \alpha \cdot T}{m r^2 + T}$$

is. Hieruit volgt, ter bepaling van dien hoek,

$$\text{tang. } \alpha < \frac{m r^2 + T}{T} f.$$

Voldoet α aan deze vergelijking, dan zal van de wrijving slechts het gedeelte $\gamma \frac{T}{r^2}$ in werking komen. Is α grooter, wordt dus de beweging gedeeltelijk een glijdende, dan zal de geheele wrijvingsweerstand versnellend op de ronddraaiende en vertragend op de voortgaande beweging werken; de versnelling van deze laatste zal dan $g (\sin. \alpha - f \cos. \alpha)$ zijn.

VIERDE HOOFDSTUK.

Over de botsing.

21. Van twee massa's M en m (Fig. 76) beweegt zich de eene met eene snelheid S , de andere met eene kleinere snelheid

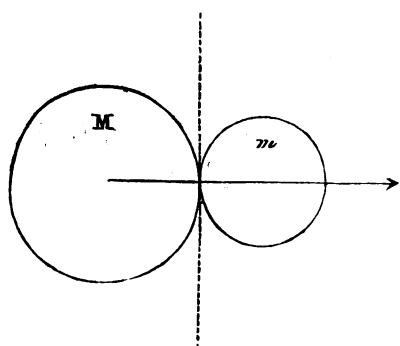


Fig. 76.

s . Vooronderstel dat beide zich bewegen volgens de rechte lijn, die hunne zwaartepunten verbindt, dan zal na eenigen tijd het eerstgenoemde het laatste inhalen. Beide lichamen zullen in botsing komen en deze zal eene rechte centrale zijn, als de lijn, die de beide zwaartepunten verbindt, in hun

raakpunt loodrecht staat op het gemeenschappelijk raakvlak.

Heeft op het oogenblik dat beide elkander aanraken hun *gemeenschappelijk zwaartepunt* eene snelheid s , dan zal

$$(M + m) v = M S + m s$$

zijn. Immers reeds vroeger (I. § 37.) zagen wij, dat de ligging van hun gemeenschappelijk zwaartepunt op eenig oogenblik door de vergelijking

$$(M + m) x_0 = M x_1 + m x_2$$

wordt bepaald. Na zekeren tijd t zal

II.

4

x_0 in $x_0 + v t$, x_1 in $x_1 + S t$ en x_2 in $x_2 + s t$ zijn overgegaan, zoodat alsdan die ligging volgt uit de vergelijking

$$(M + m)(x_0 + v t) = M(x_1 + S t) + m(x_2 + s t).$$

Trekken wij van deze vergelijking de voorgaande af en deelen wij van het verschil de beide leden door t , dan komt er

$$(M + m)v = MS + ms$$

of

$$31 \dots \dots v = \frac{MS + ms}{M + m}.$$

Van het begin der botsing tot aan haar einde ondergaat de massa m eene drukking, waardoor zij eene versnellende beweging verkrijgt. Die drukking op eenig willekeurig oogenblik van de botsing D en die versnelling γ noemende, zal

$$D = m \gamma$$

zijn. Maar op datzelfde willekeurig genomen oogenblik ondergaat de massa M een even groote tegendrukking (I. § 10), zoodat, als wij de vertraging, die zij daardoor ondervindt, γ' noemen, ook

$$D = M \gamma'$$

is. Gedurende de gansche aanraking is dus

$$m \gamma = M \gamma';$$

daarom zal ook, nadat de lichamen gedurende t sekonden in aanraking zijn geweest, waardoor de snelheid van M is gedaald van S tot S' en die van m is toegenomen van s tot s' ,

$$m(s' - s) = M(S - S')$$

zijn, of

$$32 \dots \dots ms' + MS' = MS + ms.$$

Maar volgens vergel. 31 is bij het begin van de aanraking

$$v = \frac{MS + ms}{M + m},$$

terwijl na den tijd t , op dezelfde gronden,

$$v' = \frac{MS' + ms'}{M + m}$$

moet zijn. Daar echter, volgens de vergel. 32,

$$MS' + ms' = MS + ms$$

is, zal dan ook

$$v = v'$$

zijn; dat wil zeggen:

de snelheid van het gemeenschappelijk zwaartepunt der beide in botsing komende lichamen blijft gedurende den ganschen stoot onveranderd.

Terwijl zoo het gemeenschappelijk zwaartepunt der beide massa's met de standvastige snelheid v zich voortbeweegt, zet de massa m hare versnellende en de massa M hare vertragende beweging voort. Dit zal zoo voortduren tot op het oogenblik, dat de snelheid s van de eerstgenoemde tot v gestegen en de snelheid S van de laatstgenoemde tot v gedaald is. Want, aangezien de snelheid van het gemeenschappelijk zwaartepunt v nooit te boven gaat, zal ook v de grens zijn van de waarden die s en S kunnen bereiken. Op dit oogenblik zullen dan ook de zwaartepunten van elk der massa's in 't bijzonder tot dat van de gezamenlijke massa zoo veel mogelijk genaderd zijn; beide zullen den vorm hebben aangenomen die in Fig. 77 is voorgesteld.

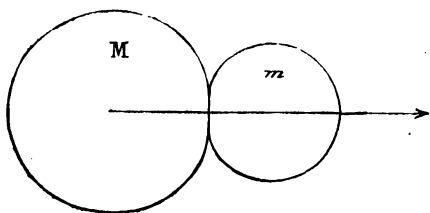


Fig. 77.

22. Zijn de beide lichamen weinig veerkrachtig en is daarbij de botsing zeer sterk, dan zullen zij nagenoeg de in Fig. 77 voorgestelde gedaante behouden. De *vermindering* die de snelheid van de massa M heeft ondergaan zal dan (vergel. 31)

$$S - v = S - \frac{MS + ms}{M + m} = \frac{S - s}{1 + \frac{M}{m}}$$

en de *vermeerdering* van de snelheid der massa m

$$v - s = \frac{M S + m s}{M + m} - s = \frac{S - s}{1 + \frac{m}{M}}$$

tot uitdrukking hebben.

Het daartegen overstaand geval is dat, waarbij de lichamen zeer veerkrachtig zijn en de botsing zwak is. De beide lichamen zullen dan hunne oorspronkelijke gedaante weder aannemen en, terwijl dit geschiedt, zullen beide op elkander nogmaals eene even groote drukking uitoefenen als noodig was om hun de in de figuur voorgestelde afgeplatte gedaante te geven.

Gedurende dit gedeelte van den duur der botsing zal dus het zwaartepunt van m nogmaals eene versnelling $\frac{S - s}{1 + \frac{m}{M}}$ en

dat van M nogmaals eene vertraging $\frac{S - s}{1 + \frac{M}{m}}$ ondervinden.

Na de botsing zal dus de snelheid van de eerstgenoemde met

$$\frac{2(S - s)}{1 + \frac{m}{M}}$$

vermeerderd, en die van de laatstgenoemde met

$$\frac{2(S - s)}{1 + \frac{M}{m}}$$

verminderd zijn.

Terwijl dus na eene botsing, waarbij men beide lichamen volkomen onveerkrachtig mag vooronderstellen,

$$33 \dots \left\{ \begin{array}{l} s + \frac{S - s}{1 + \frac{m}{M}} \\ S - \frac{S - s}{1 + \frac{M}{m}} \end{array} \right. \text{ en}$$

de snelheden zijn van beide, zullen zij

$$34 \dots \left\{ \begin{array}{l} s + \frac{2(S-s)}{1 + \frac{m}{M}} \\ \text{en} \\ S - \frac{2(S-s)}{1 + \frac{M}{m}} \end{array} \right.$$

zijn na eene botsing, waarbij men beide lichamen voor volkomen veerkrachtig mag houden.

In elk ander geval zal de versnelling en de vertraging gedurende de uitzetting een gedeelte van de in de eerste periode veroorzaakte zijn. Stellen wij die breuk door e voor, dan is dus in het algemeen

$$35 \dots \left\{ \begin{array}{l} s + \frac{(1+e)(S-s)}{1 + \frac{m}{M}} \\ \text{en} \\ S - \frac{(1+e)(S-s)}{1 + \frac{M}{m}} \end{array} \right.$$

de snelheid van beide lichamen na den stoot.

Deze breuk e noemt men den elasticiteits-coëfficiënt bij botsing. Hare waarde nadert meer en meer tot 1, naarmate de lichamen veerkrachtiger zijn en de stoot zwakker is; zij nadert daarentegen meer en meer tot *nul* in de tegenovergestelde omstandigheden.

23. Is het lichaam m , dat den stoot ontvangt, op dat oogenblik in rust, dan zal, als de omstandigheden zoo zijn dat men beide voor volkomen onveerkrachtig mag houden, uit de verg. 33 voor beider snelheid de waarde

$$\frac{MS}{m+M}$$

volgen. Terwijl dus voor den stoot de met beider snelheid overeenkomende levendige kracht $\frac{MS^2}{2}$ was, is na den stoot

$$(m + M) \frac{M^2 S^2}{2 (M + m)^2} = \frac{M^2 S^2}{2 (M + m)}$$

hare waarde. Het verschil van beide

$$\frac{M S^2}{2} - \frac{M^2 S^2}{2 (M + m)} = \frac{M S^2}{2} \cdot \frac{m}{M + m}$$

stelt den mechanischen arbeid voor, die deels in warmte wordt omgezet, deels de vervorming veroorzaakt van het lichaam, dat den stoot ontvangt. Hoe grooter de breuk $\frac{m}{M + m}$ is, des te grooter is ook de waarde van de op deze wijze verbruikte levendige kracht. Waar dus het voortbrengen van blijvende gedaante-veranderingen doel is — bijv. bij het smeden van ijzer — is het voordeelig de massa die den slag ontvangt te vergrooten. (Aanbeeld).

Het gedeelte van de levendige kracht, dat na het zoo even genoemde verlies overblijft, is $\frac{M S^2}{2} \cdot \frac{M}{M + m}$; beide lichamen zeten na den stoot hunne beweging voort met eene snelheid, waaraan deze waarde van de levendige kracht beantwoordt. Hebben zij daarna een weerstand W te overwinnen, dan zullen zij in rust komen nadat zij dien hebben verplaatst op eenen afstand l , wier waarde (§ 10) uit de vergelijking

$$\frac{M S^2}{2} \cdot \frac{M}{M + m} = W l$$

moet worden afgeleid.

Die verplaatsing dus zal grooter zijn naarmate de breuk $\frac{M}{M + m}$ grooter is. Heeft men dus ten doel een lichaam voort te drijven door botsing, dan zal het steeds voordeelig zijn de botsende massa zeer groot te nemen (Heiblok).

Is, eer de lichamen in botsing komen — s de snelheid van m , bewegen zij zich dus naar elkander toe, dan zal na den stoot (vergel. 33) de snelheid van M tot de waarde

$$S - \frac{S + s}{1 + \frac{M}{m}} = \frac{MS - ms}{M + m}$$

gedaald zijn. Die van M daarentegen zal tot datzelfde bedrag zijn gestegen; zij zal zich met die snelheid in dezelfde richting als M of nog steeds in tegenovergestelde richting bewegen, al naarmate $MS >$ of $< ms$ is, terwijl, in het geval dat $MS = ms$ is, beide in rust zullen blijven.

Bij eene zoodanige botsing van lichamen, die in tegenovergestelde richting zich bewegen, is het verlies aan levendige kracht

$$\frac{MS^2 + ms^2}{2} - (M + m) \frac{(MS - ms)^2}{(M + m)^2}$$

of

$$\frac{Mm}{M + m} = \frac{(S + s)^2}{2},$$

terwijl het, bij eene aanvankelijke beweging in dezelfde richting en bij dezelfde snelheid, slechts

$$\frac{Mm}{M + m} \cdot \frac{(S - s)^2}{2}$$

zou zijn geweest.

Daar dit verlies juist het gedeelte van de levendige kracht is, dat omgezet wordt in eenen arbeid, waardoor alleen vormverandering van de in botsing komende lichamen wordt bewerkt, is eene botsing — van twee spoortreinen, bij voorbeeld — onder de eerstgenoemde omstandigheden zoo veel meer te vreezen dan onder de laatstgenoemde. Om dezelfde redenen ook ontvangt men, bij het opvangen van zware voorwerpen, zooveel minder letsel, als men daarbij het lichaam naar beneden beweegt, dan wanneer men zich onbeweeglijk houdt.

24. Heeft eene botsing plaats tusschen twee lichamen, onder zoodanige omstandigheden dat men beide voor volkomen veerkrachtig mag houden; mag men dus vooronderstellen, dat zij beide na den stoot hunne oorspronkelijke gedaante we-

der aannemen, dan zetten zij hunne beweging voort met eene snelheid, die bepaald wordt door de vergelijkingen (34)

$$s + \frac{2(S-s)}{1 + \frac{m}{M}} \text{ en } S - \frac{2(S-s)}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Uit haar volgt, dat, als beide gelijke massa hebben, S de snelheid wordt van het lichaam dat oorspronkelijk zich met eene snelheid s bewoog, en s die van het lichaam dat oorspronkelijk eene snelheid S had. In dit geval verwisselen zij dus slechts van snelheid en zetten zoo hunne beweging voort.

Is daarbij het lichaam, dat den stoot ontvangt, op dat oogenblik in rust, is dus $s = 0$, dan zal S zijne snelheid zijn na den stoot, terwijl die van het botsende lichaam *nul* wordt. In dit geval geeft dus het eene lichaam als het ware zijne snelheid over aan het andere. Was dit zelf in aanraking met een derde, dat dezelfde massa had en in rust verkeerde, dan zal het daarop zijne snelheid overdragen, enz.; zoodat als van eene rij elastieke — bijv. ivoren — kogels, die dezelfde massa hebben, de eerste met zekere snelheid tegen den tweeden stoot, alleen de laatste van de rij in beweging zal geraken en wel met de snelheid die aan den eersten werd meêgedeeld.

Bewegen beide kogels van gelijke massa zich in tegenovergestelde richting, was dus $-s$ de snelheid van m , dan zal na den stoot zijne snelheid S zijn, terwijl daarentegen de snelheid van M in $-s$ zal zijn overgegaan. In dit geval verwisselen dus de beide lichamen, niet alleen wat de grootte maar ook wat de richting betreft, van snelheid.

25. Is een physische slinger (§ 17) in rust op het oogenblik dat een lichaam met hem in botsing komt, dan zal hij zich met zekere snelheid gaan bewegen om het ophangpunt. De afwijking die hij daarbij van zijnen evenwichts-stand ondervindt, kan tot maat strekken van de snelheid, waarmede zich het botsende lichaam bewoog.

Zij m de massa van den slinger, T zijn traagheids-moment, l de afstand van de as tot aan het punt, waar hij getroffen

wordt door de massa M , die zelf op dat oogenblik de nog onbekende snelheid S heeft. Eene in het punt van aanraking geconcentreerde massa m' , wier grootte voldoet aan de vergelijking

$$m' = \frac{T}{l^2},$$

zal (§ 12) ten opzichte van het ophangpunt hetzelfde traagheids-moment hebben als de slinger zelf. Daarom zal ook de aanvankelijke beweging van den slinger na de botsing volkomen dezelfde zijn (§ 15), als die van eene op den afstand G van het ophangpunt geplaatste massa m' . En voor de beweging, die de daar geconcentreerde massa na den stoot zal hebben, gelden, als wij vooronderstellen dat hij onder omstandigheden geschiedt, waarbij men de beide lichamen voor onveerkrachtig mag houden, de vergelijkingen (33). Door in haar $m = m'$ en $s = 0$ te stellen, wordt

$$s' = \frac{MS}{M + m'}$$

de snelheid waarmede de slinger zijne beweging begint, en

$$m' \frac{M^2 S^2}{(M + m')^2}$$

de met haar overeenkomende levendige kracht.

Vooronderstel thans dat de slinger in rust is als α de hoek van doorslag is, dan zal de levendige kracht tevens vernietigd zijn op dat oogenblik. Daarbij is echter een aan haar gelijke hoeveelheid weerstands-arbeid overwonnen; zijn bedrag zal, daar het zwaartepunt, dat eerst op den vertikalen afstand a van het ophangpunt lag, nu op den kleineren afstand $a \cos. \alpha$ daarvan is verwijderd,

$$- m g a + m g a \cos. \alpha. \text{ zijn.}$$

Derhalve is.

$$m' \frac{M^2 S^2}{(M + m')^2} = m g a (1 - \cos. \alpha),$$

waaruit

$$S = \frac{M + m'}{M} \sqrt{2 \frac{m}{m'} g a (1 - \cos. \alpha)}.$$

Daar deze de snelheid is, waarmede het lichaam M zich bewoog toen het met den slinger in botsing kwam, zal men, als de grootte van den doorslag α door waarneming is bepaald, daaruit die oorspronkelijke snelheid kunnen afleiden. (Ballistische slinger).

De waarde van m' , die in deze vergelijking voorkomt, zal men op de in (§ 17) verklaarde wijze uit den duur van de schommelingen kunnen afleiden, die de slinger maakt onder den invloed van de zwaartekracht.

26. Vooronderstellen wij thans, dat een lichaam, wiens massa M en wiens snelheid S is, in botsing komt met een lichaam wiens massa m is en wiens zwaartepunt zich beweegt met eene snelheid $s < S$, maar nemen wij nu daarbij aan, dat het stootpunt, op eenen afstand l van het zwaartepunt verwijderd, niet ligt op de lijn volgens welke zich het zwaartepunt van M beweegt. De stoot zal dan een excentrische zijn en wel eene rechte excentrische als, zooals voorondersteld wordt, de richting van den stoot in het raakpunt loodrecht staat op het gemeenschappelijk raakvlak.

Het lichaam, dat den stoot ontvangt, zal in het algemeen behalve de beweging, waarbij het zwaartepunt volgens eene rechte lijn voortgaat met eene snelheid s , eene ronddraaiende met eene hoeksnelheid ω kunnen hebben, waarbij het stootpunt om eene door het zwaartepunt gaande as zich beweegt. Van dit stootpunt zal dan de voortgaande beweging in het geheel eene snelheid

$$36 \dots s' = s + l \omega$$

hebben, die na den stoot zoowel door de versnelling van de voortgaande als door die van de ronddraaiende beweging zal zijn veranderd. Is na den stoot s in v en $l\omega$ in $l\omega'$ overgegaan, dan zal van het stootpunt de snelheid $v + l\omega'$ zijn. Noemen wij dus S' de snelheid die M heeft na den stoot, dat wil zeggen op het oogenblik dat de beide in botsing ko-

mende lichamen zich met de snelheid van het gemeenschappelijk zwaartepunt bewegen, dan is

$$37 \dots S = v + l\omega'.$$

De wijze, waarop beide deelen van de snelheid van het stootpunt kunnen vermeerderd worden, willen wij nagaan. Daartoe zij opgemerkt, dat men de drukking D , die gedurende den stoot wordt uitgeoefend, evenwijdig aan zich zelve naar het zwaartepunt verplaatst kan denken. In plaats van de in het stootpunt aangrijpende kracht D , werken dan op de massa m eene in het zwaartepunt aangrijpende gelijke kracht en een koppel, dat Dl tot moment heeft. Nemen wij eenvoudigheidshalve aan, dat de as, waarom de oorspronkelijke ronddraaiende beweging plaats heeft, loodrecht staat op het vlak van dit koppel, dan zullen wij de versnelling, die het te weeg brengt gedurende den stoot, bij die oorspronkelijke snelheid kunnen optellen om de eindsnelheid te verkrijgen.

De versnelling van de hoeksnelheid zal, als wij de tot den afstand l gereduceerde massa van het lichaam, dat den stoot ontvangt, m' noemen en dus $m'l^2$ zijn traagheids-moment is, door (§ 15)

$$\frac{Dl}{m'l^2} = \frac{D}{m'l}$$

worden voorgesteld; de versnelling langs den omtrek van den door het stootpunt beschreven cirkel zal dus op elk oogenblik

$$\psi = \frac{D}{m'}$$

zijn. Maar de vertraging, die de massa M ondervindt, is evenzoo op ieder oogenblik

$$\gamma = \frac{D}{M'}$$

zoodat voortdurend tijdens den stoot de vergelijking

$$m'\psi = M'\gamma$$

zal gelden. Indien echter dit het geval is, dan zal ook na den stoot, als S tot S' gedaald en $l\omega$ tot $l\omega'$ gestegen is

$$38 \dots m' (l\omega' - l\omega) = M (S - S')$$

zijn.

Het zwaartepunt zelf van m beweegt zich onder de daarheen verplaatste drukking D als eene daar geconcentreerde massa m . Daarom zal (§ 22) na den stoot

$$39 \dots \frac{S - S'}{v - s} = \frac{m}{M}$$

zijn.

De vergelijkingen (36—39) kunnen ons nu dienen om de verandering in de snelheid van de voortgaande beweging van M en van de voortgaande en ronddraaiende beweging van m in de gegevens S en s' uit te drukken.

Schrijven wij toch de vergel. (39) onder de gedaante

$$S - S' = \frac{m}{M} (v - s)$$

en substitueeren wij vervolgens de vergel. (36) en (37), dan komt er

$$S - S' = \frac{m}{M} (S - s') - \frac{m}{M} (l\omega' - l\omega)$$

of, volgens vergel. (38),

$$S - S' = \frac{m}{M} (S' - s') - \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m'} (S - S')$$

waaruit volgt, als men S' oplost en hare waarde van S af-trekt:

$$S - S' = \frac{S - s'}{1 + \frac{M}{m'} + \frac{M}{m}}$$

voor de verandering in snelheid, die de massa M ondergaat.

Daar volgens vergel. 39.

$$v - s = \frac{M}{m} (S - S')$$

is, heeft men dus ook

$$v - s = \frac{S - s'}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{m'}}$$

voor de verandering in de voortgaande en daar volgens vergel. 38.

$$l \omega' - l \omega = \frac{M}{m'} (S - S')$$

is, evenzoo

$$l \omega' - l \omega = \frac{S - s'}{1 + \frac{m'}{M} + \frac{m'}{m}}$$

voor de verandering in de ronddraaiende snelheid van m .

27. Indien het stootpunt onder het zwaartepunt ligt, dan zal een punt van de massa m , dat op een afstand x boven het zwaartepunt gelegen is, eene vertraging van zijne hoeksnelheid ondervinden. Terwijl de geheele voortgaande snelheid van het stootpunt van $s + l \omega$ tot $v + l \omega'$ gestegen is, zal de voortgaande snelheid van dat hoger gelegen punt van $s - x \omega$ tot $v - x \omega'$ zijn gedaald. Het punt, wiens afstand x van het zwaartepunt voldoet aan de vergelijking

$$(v - x \omega') - (s - x \omega) = 0,$$

het punt dus waarvoor

$$x = \frac{v - s}{\omega' - \omega}$$

is, zal zijne beweging na den stoot voortzetten met volkomen dezelfde snelheid, als die het had voor den stoot.

Substitueert men in deze vergelijking de waarden van $v - s$ en $\omega' - \omega$, die in de vorige § bepaald zijn, dan wordt

$$x = l \cdot \frac{m'}{m},$$

zoodat het punt, dat zijne snelheid niet verandert, — het percussiepunt of het middelpunt van den stoot — op een afstand

$$l' = x + l = l \frac{m'}{m} + l = \frac{m' l^2 + m l^2}{m l}$$

van het stootpunt ligt.

Maar $m' l^2$ is het traagheids-moment van m ten opzichte van de

as, die door het zwaartepunt gaat, en $m l^2$ het product van de gansche massa met het vierkant van den afstand waarop het zwaartepunt ligt van het stootpunt. Dus is (§ 12) $m' l^2 + m l^2$ het traagheidsmoment T_a van de massa m ten opzichte van eene door het stootpunt gaande as en

$$l' = \frac{T_a}{m l}.$$

Vergelijken wij deze uitkomst met de in § 17 (vergel. 27) beschouwden afstand, waarop het middelpunt van schommeling bij den physischen slinger van de as ligt, dan blijkt het, dat het middelpunt van den stoot bij eenig lichaam op denzelfden afstand ligt van het stootpunt, als het middelpunt van schommeling daarvan liggen zou, wanneer men het lichaam om een door het stootpunt gaande as liet schommelen.

28. Bewegen de beide in botsing komende lichamen zich volgens richtingen, die met de normaal op het gemeenschappelijk raakvlak niet samenvallen, dan zal men de beide snelheden kunnen ontbinden in eene richting evenwijdig met dit raakvlak en in de richting van die normaal. Zij $S \cos. \beta$ de volgens haar vallende ontbondene van de snelheid der massa M , $s \cos. \alpha$ die van de snelheid der massa m , dan zal ten opzichte van deze ontbondene de stoot eene rechte centrale zijn, zoodat hare gevolgen uit de vergelijkingen (§ 21) kunnen worden afgeleid, door daarin s te vervangen door $s \cos. \alpha$ en S door $S \cos. \beta$.

Zijn de beide andere ontbondenen $s \sin. \alpha$ en $S \sin. \beta$ gelijk, dan zal in de richting van het raakvlak aan het stootpunt geene botsing ontstaan en dus de snelheid in die richting $s \sin. \alpha$ en $S \sin. \beta$ zijn. Volgens het parallelogram der snelheden verbonden met de door de botsing in de richting der normaal veranderde waarden van $S \cos. \beta$ en $s \cos. \alpha$ zal de resultante de grootte en de richting van de snelheid na den stoot geheel bepalen.

Wanneer echter $s \sin. \alpha$ en $S \sin. \beta$ ongelijk zijn, dan zullen

beide lichamen langs elkander glijden. Daarbij zal wrijving ontstaan, die, volgens de richting van eene raaklijn aan beide oppervlakken werkende, hun eene ronddraaiende beweging zal mededeelen. De snelheden $s \sin. \alpha$ en $S \sin. \beta$ zullen dus veranderd worden op dezelfde wijze, als wanneer de beide lichamen M en m met die snelheid in excentrische botsing waren gekomen. De gevolgen van deze botsing zal men volgens de vorige § kunnen berekenen, door daarin s en S te vervangen door $s \sin. \alpha$ en $S \sin. \beta$. De resultante van de op deze wijze bepaalde snelheden en van de door het normaal gedeelte der botsing veranderde waarden van $s \cos. \alpha$ en $S \cos. \beta$, zal de beweging na den stoot volkomen bepalen.

III.

STATICA VAN DRUPVORMIGE VLOEISTOFFEN.

VIJFDE HOOFDSTUK.

Over het evenwicht van drupvormige vloeistoffen, op wier oppervlakte drukking wordt uitgeoefend.

29. De vloeistoffen, de drupvormige zoowel als de gasvormige, onderscheiden zich van de vaste lichamen voornamelijk daardoor, dat de wrijvings-weerstand, die bij de verplaatsing der deeltjes over en langs elkander ontstaat, uiterst gering is. De deeltjes van vloeistoffen in het algemeen werken slechts afstootend op elkander. Bij onze beschouwingen zullen wij daarom in de eerste plaats steeds aannemen:

dat de wrijvings-coëfficiënt, die bij eene verplaatsing dier deeltjes langs elkander geldt, nul is.

De drupvormige vloeistoffen onderscheiden zich evenwel in dit opzicht van de gasvormige, dat bij gene de grootte van de afstootende krachten nul wordt, zoodra eene zekere gewichts-hoeveelheid van een vloeistof eene bepaalde ruimte inneemt. Tracht men deze ruimte te verminderen dan nemen,

die krachten sterk toe, zoodat er eene zeer groote drukking noodig is om bij zulk een vloeistof eene slechts geringe vermindering van volume te veroorzaken.

Bij eene drukking van 1.033 kil. op den $\square$ centimeter bedraagt de vermindering van eenig volume water slechts een twintigduizendste van het oorspronkelijk volume.

Bij onze beschouwingen zullen wij daarom in de tweede plaats vooronderstellen, dat drupvormige vloeistoffen niet samendrukbaar zijn.

30. Gaan wij nu na welke drukking de deeltjes ondervinden van een vloeistof, die in eene volkomen geslotene en geheel gevulde ruimte zich in evenwicht bevindt, onder den invloed van krachten, die haar trachten samen te drukken.

In het algemeen, dat wil zeggen wanneer omtrent den evenwichtstoestand der vloeistof geene bepaalde vooronderstelling gemaakt wordt, zal de grootte der drukking binnen in de vloeistof van punt tot punt verschillen. Zoolang men dus een deeltje beschouwt, wiens oppervlakte eene eindige uitgebreidheid heeft, mag men niet aannemen, dat in elk punt van die oppervlakte de drukking dezelfde grootte heeft. Toch zal men tot deze vooronderstelling zoo langer zoo meer gerechtigd zijn, naarmate men zich voorstelt, dat deze uitgebreidheid afneemt; met andere woorden, als v eene zekere vlakke-uitgebreidheid, d de op haar werkende drukking en c eene standvastige grootte voorstelt, dan zal met het afnemen van v de waarde van de breuk $\frac{d}{v}$ meer en meer tot c naderen. Voor eene oneindig kleine vlakke-uitgebreidheid mag men dus stellen, dat

$$\frac{d}{v} = c$$

of

$$40 \dots \dots d = v c$$

is; eene uitdrukking die aantoont, dat c hier eigenlijk de drukking op de eenheid van vlakke-uitgebreidheid voorstelt.

Zij nu (Fig. 78) V eene hoeveelheid vloeistof die eene ge-

II. 5

heel geslotene ruimte volkomen vult en op wier oppervlakte drukking wordt uitgeoefend. Op de zeer kleine vlakke-uitgebreidheden v' en v'' is dan de drukking $c' v'$ en $c'' v''$; hare richting zal loodrecht staan op die vlakke-uitgebreidheden, omdat overal

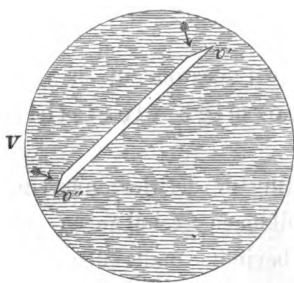


Fig. 78.

waar geen wrijving wordt opgewekt — en dit was omtrent de vloeistoffen onze eerste vooronderstelling — de weerstand, die de lichamen tegen elkander uitoefenen, gericht is volgens de normaal op hunne elkander rakende oppervlakken.

Beschouwen wij verder v' en v'' als grond- en bovenvlak van een kleine zuil vloeistof, en nemen wij aan, dat zij met de ribben dier zuil de hoeken α' en α'' maken, dan zal de zuil in de richting der ribben tegen haar bovenvlak een drukking $d' = c' v' \cos. \alpha'$ en tegen haar grondvlak een drukking $d'' = c'' v'' \cos. \alpha''$ ondergaan. Daar de wrijving langs de zijwanden *nul* is, zal dan de zuil slechts in evenwicht kunnen zijn als die beide drukkingen elkanders werking vernietigen, dus, als

$$c' v' \cos. \alpha' = c'' v'' \cos. \alpha''$$

is. Maar $v' \cos. \alpha'$ en $v'' \cos. \alpha''$ stellen beide de loodrechte doorsnede van den zuil voor. Zij zijn dus aan elkander gelijk, zoodat ook

$$c' = c''$$

zijn zal.

Daar nu v' en v'' geheel willekeurig aangenomen deeltjes van de vloeistof voorstellen, en men elk paar deeltjes op deze zelfde wijze kan beschouwen als grond- en bovenvlak van een kleine zuil vloeistof, geldt in het algemeen de stelling, dat

als een vloeistof in evenwicht is onder den invloed van op hare oppervlakte drukkende krachten, de grootte van die drukking op de

eenheid van vlakke-uitgebreidheid overal in die vloeistof dezelfde is.

Bij het bewijzen van deze stelling hebben wij voor het evenwicht van de zuil vloeistof de voorwaarde gesteld, die voor het evenwicht van een absoluut vast lichaam geldt. Dit was geoorloofd, omdat de evenwichtstoestand der vloeistof niet zal ophouden te bestaan, als een gedeelte eensklaps in een absoluut vast lichaam veranderd is; dat de vloeistof niet elastiek was hebben wij toch in de tweede plaats (§ 29) ondersteld.

Het kan niet overbodig geacht worden hier uitdrukkelijk te doen opmerken, dat bij deze beschouwing de werking van de zwaartekracht op de deeltjes der vloeistof geheel buiten rekening is gebleven.

31. De in de voorgaande § bewezen stelling leidt onmiddellijk tot een voor de praktijk belangrijk resultaat

Zij toch B (Fig. 79) een ballon, die twee cirkelvormige openingen heeft van verschillende doorsnede, en dat die openingen de grondvlakken vormen van holle cylindrs, waarin zich zuigers waterdicht op en neer bewegen. Als dan die ballon volkomen gevuld is met een vloeistof, zoodat deze de platte grondvlakken der zuigers aanraakt, dan zal, volgens die stelling, eene drukking, op den kleinsten zuiger uitgeoefend, onveranderd overgaan op ieder ge-

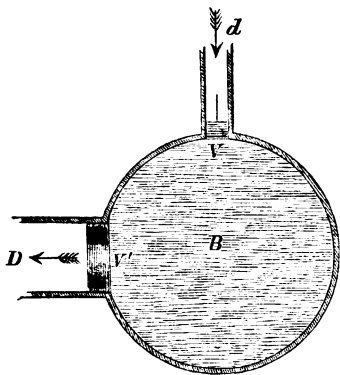


Fig. 79.

deelte van den grootsten, dat een even groote vlakke-uitgebreidheid heeft.

Noemt men d de drukking op den kleinsten, D de drukking tegen den grootsten zuiger, V en V' de inhouden van hunne grondvlakken, dan zal

$$D : d = V' : V$$

of

$$D = d \frac{V'}{V}$$

zijn.

Zijn de grondvlakken der zuigers niet plat, hebben zij bijv. eene gedaante, die tot de in Fig. 80 voorgestelde doorsnede

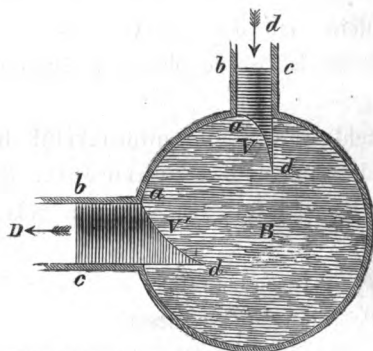


Fig. 80.

aanleiding geeft, dan zullen

in de breuk $\frac{V'}{V}$, waarmede

de onmiddellijk van buiten uitgeoefende drukking moet

vermenigvuldigd worden, V' en V de inhouden voorstel-

len van de doorsneden der buizen, waarin zich de zuig-

gers bewegen. Want ontbindt men de drukking $c v$, die op

eenig element van het ge-

bogen grondvlak wordt uitgeoefend, in drie onderling loodrechte richtingen, waarvan er een evenwijdig is aan de as van de buis, en vooronderstelt men dat hare richting met die as een hoek α maakt, dan zal

$$c v \cos. \alpha$$

de kracht zijn, die den zuiger rechtstreeks voortdrijft. De resultante van alle deze op de verschillende elementen werkende krachten zal dus

$$\Sigma c v \cos. \alpha$$

of, (§ 30),

$$c \Sigma v \cos. \alpha$$

zijn, in welke uitdrukking nu $\Sigma (v \cos. \alpha)$ niets anders is, dan de loodrechte doorsnede van de buis, waarin zich de zuiger beweegt.

Men ziet lichtelijk in, dat deze resultante in het algemeen niet samenvalt met de as van de buis. In onze figuur bijv. zal zij veel nader bij ab dan bij cd liggen, omdat de som der in die richting ontbondenen langs het aan

ab grenzende gedeelte van het grondvlak veel grooter is dan langs het aan cd grenzende.

Ook zullen de drie resultanten der volgens de assen ontbondene drukkingen in het algemeen in verschillende punten van het grondvlak aangrijpen, zoodat zij niet steeds tot eene eind-resultante kunnen worden samengesteld.

De uitkomsten, in deze § verkregen, gelden, welke ook de vorm zij van de geslotene ruimte, die met vloeistof gevuld is. Zij gelden dus, ook als deze bestaat uit twee holle cilinders, waarin zich de zuigers op en neer kunnen bewegen en wier inwendige ruimten door een buis met elkander in gemeenschap zijn. **Hydraulische pers.**

Weerstands-arbeid en beweegkrachts-arbeid zijn ook hier, als beide zuigers zich gelijkmatig bewegen, aan elkander gelijk. Want terwijl het aangrijpingspunt van d den weg l aflegt, wordt het aangrijpingspunt van D slechts $l \frac{V}{V'}$ lengte-eenheden in de richting van D verplaatst, omdat de eene zuiger in dat geval een kolom water $V l$ wegdrukt, die een cilindervormige ruimte, wier grondvlak V' is, slechts tot eene hoogte $l \frac{V}{V'}$ kan aanvullen.

De nuttige arbeid zal echter wederom slechts een deel van den beweegkrachts-arbeid zijn. Wil men nagaan welk deel van dezen wordt besteed om de wrijving te overwinnen, dan moet men omtrent de wijze, waarop de zuigers zich waterdicht in de cilinders bewegen, eene bepaalde vooronderstelling maken. Heeft bijv. die sluiting plaats door middel van een lederen ring, die zoo omgebogen is dat het eene gedeelte van zijne oppervlakte ab (Fig. 81) tegen den zuiger en het andere gedeelte cd tegen den wand van den cilinder wordt gedrukt door de vloeistof zelve, dan zal in het product $N f$, dat de wrijving voorstelt, N de drukking zijn, uitgeoefend op een cilindervormig oppervlak, dat de omtrek van den zuiger tot loodrechte doorsnede en ab tot hoogte heeft. Beide zuigers bieden eene op deze wijze te berekenen weerstand, die door de beweegkracht moeten worden overwonnen.

70 § 31. Hydraulische pers met inachtneming van de wrijving.

Is bij beide cilinders $ab = h$ de hoogte van het cilinder-vormig oppervlak, langs hetwelk de ring den zuiger raakt, en

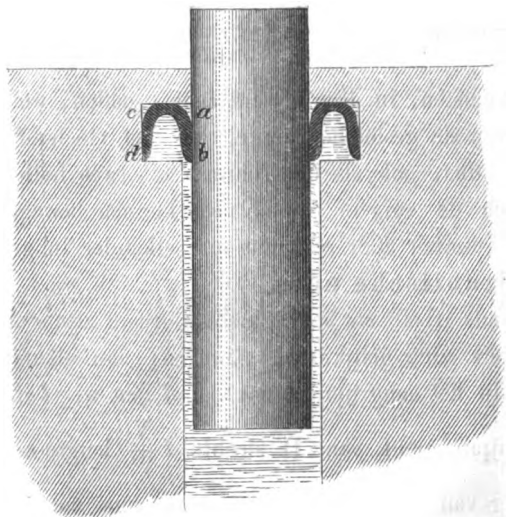


Fig. 81.

d de drukking, die de vloeistof op de eenheid van vlakke-uitgebreidheid uitoefent, R de straal van den grooten, r die van den kleinen zuiger, dan is de wrijving bij den eerstgenoemden

$$Nf = 2\pi R h d f$$

en bij den laatstgenoemden

$$nf = 2\pi r h d f.$$

Als dan K de kracht is, waarmede men den kleinen zuiger naar beneden drukt, dan is

$$K - 2\pi r h d f = \pi r^2 d$$

de op de vloeistof uitgeoefende drukking, en

$$(K - 2\pi r h d f) \frac{R^2}{r^2} = \pi R^2 d$$

de grootte van hare werking tegen het grondvlak van den grooten zuiger. Daar deze nog de wrijving van den grooten

zuiger moet overwinnen zal de last, die inderdaad door middel van K gelijkmatig kan worden opgeheven, slechts

$$L = \pi R^2 d - 2 \pi R h d f$$

zijn.

De wrijving in aanmerking nemende is dus

$$\frac{L}{K} = \frac{R^2 - 2 R h f}{r^2 - 2 r h f} = \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{1 - 2 \frac{h}{R} f}{1 + 2 \frac{h}{r} f} \right).$$

Terwijl de kleine zuiger den weg l aflegt, doorloopt de groote slechts den weg $l \frac{r^2}{R^2}$. De aan dezen beweegkrachts-arbeid

$K l$ beantwoordende nuttige arbeid is dus

$$L \frac{r^2}{R^2} l = K \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{1 - 2 \frac{h}{R} f}{1 + 2 \frac{h}{r} f} \right) \cdot \frac{r^2}{R^2} l = \frac{1 - 2 \frac{h}{R} f}{1 + 2 \frac{h}{r} f} K l.$$

Voorbeelden.

11. Op den kleinen zuiger van een hydraulische pers drukt een kracht van 5 kil.

De grondvlakken der zuigers hebben stralen van 1 en 15 centimeters, terwijl de hoogte van den afsluitingsring langs den grooten zuiger 1 centim. en langs den kleinen 0.6 centim. bedraagt.

Men vraagt naar de grootte van de last, die door den grooten zuiger met gelijkmatige snelheid kan worden opgeheven, en naar het gedeelte van den beweegkrachts-arbeid, dat nuttig wordt aangewend. ($f = 0.15$.)

Antw. $L = 934,3$ kil. De nuttige arbeid is 83% van den beweegkrachts-arbeid.

12. Bij een kaapstander, wiens grondvlak een straal heeft van 1 decimeter en wiens gewicht 200 kil. bedraagt, wordt de slijting van de pan, waarin hij staat, voorkomen, doordien tusschen deze en het grondvlak zich een ruimte bevindt, die met water gevuld is.

Hoe groot is het moment van de wrijving, die men bij het gebruik van dit werktuig heeft te overwinnen, als de lederen ring, die hem waterdicht in de pan doet sluiten, een hoogte heeft van 1.5 centim.? — en hoeveel verschildt het van het moment, dat men bij eene inrichting als de in Deel I, § 54 beschrevene, te overwinnen heeft? ($f = 0.2$.)

Antw. Het moment der wrijving is 14 kil. werkende aan een hefbooms-arm van 10 centimeter; het is $\frac{7}{10}$ van het moment, dat in de laatste plaats is genoemd.

ZESDE HOOFDSTUK.

Over de drukking, die de vloeistoffen in den toestand van evenwicht door hun eigen gewicht uitoefenen.

32. Als de deeltjes van een vloeistof onder de werking van eenige krachten in evenwicht zijn, dan zal de vrije oppervlakte dier vloeistof in elk punt loodrecht moeten zijn op de richting van de resultante der krachten die op het aldaar zich bevindende deeltje werken. Is toch in eenig punt aan deze voorwaarde niet voldaan, dan zal men die resultante kunnen ontbinden in twee krachten, waarvan de eene de oppervlakte in dat punt raakt. Hoe klein nu ook deze ontbondene moge uitvallen, zij zal, daar de wrijving van de deeltjes langs elkander *nul* is, steeds in staat zijn het in dat punt zich bevindende deeltje in beweging te brengen.

Is de in een vat zich bevindende vloeistof in rust, terwijl op haar alleen de zwaartekracht werkt, dan zal dus hare vrije oppervlakte horizontaal zijn.

Draait daarentegen dit vat om eene vertikale as, dan zal, als de deeltjes in evenwicht zijn, de vrije oppervlakte hol zijn. Die oppervlakte moet dan toch in elk punt loodrecht zijn op de resultante van de zwaartekracht en de middelpuntvliedende kracht, die op het in dat punt zich bevindende deeltje werkt.

Is een vloeistof, die een bol bedekt, in rust, onder de werking van de aantrekkingskracht, die de bol op haar uitoefent, dan zal hare oppervlakte zelve ook bolvormig zijn, omdat zij

dan alleen in elk punt loodrecht staat op de richting der kracht, die op hare deeltjes werkt.

Wentelt daarentegen de bol om een as, dan zal de gedaante dier oppervlakte van de bolvormige afwijken. Want zij zal dan in elk punt loodrecht moeten zijn op de resultante van de zwaartekracht en van de middelpuntvliedende kracht, en deze resultanten, die niet allen door een zelfde punt gaan, kunnen niet allen normalen van een bol zijn. Daar de grootte van de laatstgenoemde kracht met den afstand van de polen toeneemt en hare richting met die van de eerstgenoemde niet steeds denzelfden hoek maakt, zal beider resultante in de verschillende punten van denzelfden meridiaan niet evenveel van de vertikaal afwijken. Beide omstandigheden zal men moeten in rekening brengen als men de gedaante van de vrije oppervlakte der vloeistof wil bepalen, die in de verschillende punten van den bol loodrecht op die resultante zijn zal.

Indien de aarde een volkomene bol en met water geheel bedekt was, zou de oppervlakte van dit water van de bolvormige reeds sterk afwijken. Nu zij daarenboven zelve aan de polen is afgeplat, zal die afwijking nog grooter zijn. Alleen aan de polen en onder den Aequator zal die oppervlakte loodrecht zijn op de vertikaal.

Voorbeelden.

13. Als een glas water bij een hellend vlak neerglijdt, dat een hoek van 35° maakt met den horizon, welken stand zal dan de oppervlakte van dat water aannemen?

Antw. De resultante van het gewicht en van den traagheids-weerstand zal een hoek van 85° maken met de vertikaal van het zwaartepunt; dus zal de oppervlakte met het hellend vlak evenwijdig zijn.

14. Welken stand zal de oppervlakte van dat water aannemen, als men de wrijving van het glas over het hellend vlak in rekening brengt en $f = 0.2$ stelt?

Antw. Het zal met den horizon een hoek maken van $23^\circ 41' 24\frac{1}{4}''$.

33. Is een vloeistof, onder den invloed van haar eigen gewicht alleen, in evenwicht, dan ondervindt elk harer deeltjes zoowel opwaarts als benedenwaarts eene drukking, wier grootte alleen afhangt van den afstand waarop het beneden de vrije oppervlakte ligt.

Nog geldt hetzelfde voor een deeltje e , dat beneden den schuins gerichten wand FG ligt. In de eerste plaats drukt daarop weder het gewicht van een cilinder vloeistof $e f$. Deze zelf ondervindt daarbij nog eene drukking, gelijk aan de in vertikale richting vallende ontbondene van de tegendrukking, die de wand langs f uitoefent. Nemen wij aan dat dit deeltje zeer klein is, dan mogen wij vooronderstellen dat over zijne gansche uitgestrektheid de drukking standvastig is. De drukking, die het in het geheel ondervindt, is dan gelijk aan het gewicht van den cilinder die f tot grondvlak en AC tot hoogte heeft. Hare in vertikale richting vallende ontbondene wordt, als α de hoek is dien FG met den bodem maakt, verkregen door dat gewicht met $\cos. \alpha$ te vermenigvuldigen. Maar $f \cos. \alpha = e$; dus zal deze ontbondene het gewicht zijn van den cilinder wiens grondvlak e en wiens hoogte AC is. Benedenwaarts wordt derhalve het deeltje e in het geheel gedrukt door het gewicht van den cilinder, die dat deeltje tot grondvlak en zijne diepte beneden de vrije oppervlakte tot hoogte heeft; en zal het in evenwicht zijn, dan moet de opwaarts gerichte drukking, die het ondervindt, even groot zijn.

Alle punten, die in eene vloeistof in hetzelfde horizontale vlak liggen, ondervinden, als deze vloeistof in evenwicht is, eene even groote drukking.

Hieruit volgt onmiddellijk, dat in vaten die door buizen met elkander in verband staan en in communiceerende buizen de vrije oppervlakten van de vloeistof, waarmede zij gevuld zijn, moeten liggen in een zelfde horizontaal vlak. Zijn de beenen van communiceerende buizen gevuld met vloeistoffen, die verschillend specifiek gewicht hebben, dan zullen de hoogten, waartoe zij gevuld zijn, in den toestand van evenwicht omgekeerd evenredig zijn met de grootten dier specifieke gewichten.

In de tweede plaats kan men uit het in deze § behandelde gemakkelijk afleiden, dat de drukking, die de in evenwicht zijnde vloeistof op den bodem van het vat uitoefent, ge-

ning was uitgegaan van de opwaartsgerichte drukking $s a_0 z_0 \cos. \alpha$, die eenig element a_0 van den zijwand ondervindt.

Om te bepalen hoever het aangrijpingspunt van de resultante der drukking — het middelpunt van drukking — verwijderd is van de lijn, langs welke de oppervlakte der vloeistof den zijwand aanraakt, merken wij op, dat het moment van de gansche drukking ten opzichte van die lijn gelijk is aan de som van de momenten der drukkingen in de verschillende punten van dien wand.

Zij x de gevraagde afstand, l_0 de afstand van een wille-

keurig punt a_0 , l_1 die van een punt a_1 , enz.

(Fig. 84) dan zal

$$D x = \sum (s a z l)$$

of (vergel. 41).

$$s.V Z H. x = \sum (s a z l)$$

zijn.

Daar verder $Z H =$

$$G Z \sin. \alpha \text{ en } z = l \sin. \alpha$$

is, wordt deze vergelijking

$$s V . G Z \sin. \alpha x = \sum (s a l^2 \sin. \alpha) = s \sin. \alpha \sum (a l^2)$$

waaruit

$$42 \dots x = \frac{\sum (a l^2)}{V . G Z}.$$

Vergelijken wij deze uitdrukking met de vergel. 27 (§ 17), dan blijkt het, dat

het middelpunt van drukking op den zijwand van de vrije oppervlakte verwijderd is op een afstand, gelijk aan de lengte van den mathematischen slinger, die dezelfde schommelinsduur zal hebben als die zijwand, wanneer hij schommelt om de lijn, langs welke hij door de vloeistof wordt aangeraakt.

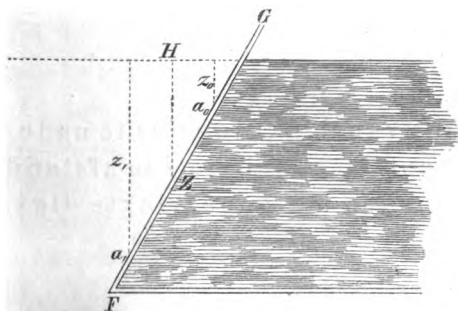


Fig. 84.

De in vergel. 42 in den teller voorkomende waarde is die van het buigings-element (D. I § 79) van den zijwand ten opzichte van de lijn volgens welke de oppervlakte hem aanraakt. Noemen wij dit B' en het buigings-element ten opzichte van de aan die lijn evenwijdige door het zwaartepunt gaande as B , dan is (D. I pag. 184)

$$B' = B + V \cdot GZ^2.$$

Door substitutie dezer waarde gaat de vergel. 42 over in deze

$$43 \dots x = GZ + \frac{B}{V \cdot GZ};$$

in deze gedaante doet zij zien,

dat het middelpunt van drukking des te nader komt bij het zwaartepunt, naarmate den afstand GZ , waarop dit beneden de oppervlakte ligt, grooter is.

Voorbeelden.

15. Een dijk, wiens vertikale doorsnede een gelijkbeenig trapezium is, heeft een hoogte van 3 meters, terwijl zijn kruin 2 meters breed is.

Hoe breed moet die dijk zijn aan zijn grondvlak, als hij niet zal verschuiven wanneer het water wast tot aan zijn kruin?

(spec. gew. van de specie $s = 1.6$ en van het water 1. Wrijvings-coëfficiënt: 0,8).

Antw. Het grondvlak zal meer dan 3,8 meters breed moeten zijn.

16. Hoe hoog zal men den in het vorige vraagstuk genoemden dijk kunnen maken zonder dat hij gevaar loopt door de drukking van het water te worden omvergeworpen en vooronderstellende dat men zijn grondvlak 4 meters breed heeft gemaakt?

Antw. 5 meters ruim.

(Ter oplossing van het 15^{de} vraagstuk merke men op, dat de dijk tegen zijn grondvlak wordt gedrukt door zijn eigen gewicht en door de in vertikale richting vallende onbondene van de drukking tegen den zijwand. Hij wordt daarentegen opgelicht door de drukking van het water tegen zijn grondvlak, daar dit zeker in communicatie is met het tegen den dijk staande water. De algebräische som van deze krachten is de normale drukking en met haar is de wrijving tegen het grondvlak gegeven. Van verschuiving zal eerst sprake zijn, als deze wordt overwonnen door de in horizontale richting vallende onbondene van de drukking tegen den zijwand.

Bij de oplossing van het 16^{de} vraagstuk bedenke men, dat er evenwicht zijn zal, als de som van de momenten van alle op den dijk werkende krachten ten opzichte van de landwaarts gelegene grondlijn *nul* is. Het stabiliteitsmoment van den dijk ten opzichte van deze as van omkanteling bestaat uit de som van twee momenten, te weten: uit het moment van het gewicht verminderd met de opwaarts gerichte drukking tegen het grondvlak en uit dat van de vertikale ontbondene der drukking op den zijwand, die aangrijpt in 't middelpunt van de drukking. Het moment van de in horizontale richting vallende ontbondene dezer drukking tracht dit stabiliteits-moment te overwinnen).

Is de wand, die de drukking ondervindt, gebogen, dan zal nog steeds de in vertikale richting vallende ontbondene van die drukking gelijk zijn aan het gewicht van een zuil water, die den wand tot grondvlak heeft en wier bovenvlak ligt in de vrije oppervlakte van de vloeistof.

Zij toch v een element van het gebogen vlak, z zijn diepte beneden de vrije oppervlakte en s het specifiek gewicht der vloeistof, dan zal de in de richting van de normaal op dat element werkende drukking door svz worden voorgesteld. Nemen wij aan, dat die normaal met de onderling loodrechte assen OX , OY , OZ , waarvan de laatste vertikaal gericht is, de hoeken α , β , γ , maakt, dan is $svz \cos. \gamma$ de vertikale drukking, die het element ondervindt. Daar nu $v \cos. \gamma$ de loodrechte doorsnede is van den cilinder, die v tot grondvlak heeft, is $svz \cos. \gamma$ het gewicht van de vloeistof die boven v staat. Daar voor alle elementen hetzelfde geldt, heeft dus de gansche vertikale drukking de bovengenoemde waarde.

De in de richting van OX werkende drukking wordt door $s \Sigma v z \cos. \alpha$ voorgesteld. Maar het vlakke-element maakt met het vlak XIJ den hoek α omdat zijn normaal dien hoek maakt met de as OX ; $v \cos. \alpha$ is dus de projectie van dat element en $\Sigma v \cos. \alpha$ de projectie van het gansche gebogen vlak op het vlak XIJ . Derhalve stelt $\Sigma v z \cos. \alpha$ de som voor van de produkten, die verkregen worden door elk element van die projectie met zijnen afstand van de vrije oppervlakte te vermenigvuldigen, en wij weten (D. I § 37) dat deze som gelijk is aan het product van die gansche projectie met de loodlijn, uit zijn zwaartepunt op die vrije oppervlakte neergelaten. De grootte

van de gansche in de richting van OX werkende drukking zal dus $s V_x h'$ zijn, als V_x de genoemde projectie en h' de lengte dier loodlijn is, terwijl men voor de in de richting van OIJ vallende ontbondene op dezelfde wijze $s V_y h''$ zal vinden.

Als dus een vat van willekeurige gedaante gevuld is met een vloeistof, dan zal de resultante van al de drukkingen, die de verschillende deelen der wanden ondervinden, eene vertikaal benedenwaarts gerichte kracht zijn, die gelijk is aan het gewicht van de zich in het vat bevindende vloeistof. Want de drukking in de richting van de as OX heeft zoowel links als rechts de absolute waarde $s V_x h'$, en evenzoo de drukking in de richting van OIJ zoowel naar voren als naar achteren de absolute waarde $s V_y h''$. Er blijft dus niets over dan de vertikale drukking $s \Sigma v \cos. \gamma$, die, gelijk wij zoo even reeds zagen, het gewicht voorstelt van de gansche op de verschillende deelen van den wand staande vloeistof.

Heeft het vat eene cilindervormige gedaante, dan zal eene even groote tegendrukking door den bodem alleen worden uitgeoefend; in elk ander geval door den bodem en de zijwanden te zamen. Is het vat zoowel naar boven als naar beneden vernauwd, dan zullen de vertikale drukkingen op twee vlakte-elementen, die op dezelfde vertikaal liggen, in teeken verschillen; hun algebraïsche som zal het gewicht zijn van de zuil vloeistof, die het laagst gelegen element tot grondvlak heeft.

35. Stellen wij ons voor, dat eenig lichaam geheel of gedeeltelijk in een vloeistof gedompeld is, dan zal de drukking, die door deze op zijn oppervlakte wordt uitgeoefend, geheel dezelfde zijn als de tegendrukking, waarover wij aan het einde der vorige § spraken. Zij zal eene vertikaal opwaarts gerichte kracht zijn, wier grootte gelijk is aan het gewicht van de vloeistof, die door het ingedompelde lichaam wordt verplaatst.

Immers tegenover de horizontale drukkingen $+ s V_x h'$ en $+ s V_y h''$ in de richtingen OX en OIJ staan weder de even groote tegenovergesteld gerichte drukkingen $- s V_x h'$ en

$s \sqrt{g} h''$, zoodat alleen de opwaarts gerichte $s \Sigma v \cos. \gamma h$ de resultante is.

En deze is niets anders dan het gewicht van de verplaatste vloeistof. Is toch het lichaam geheel ingedompeld dan komt in deze som te gelijk met eenig vlakke-element, dat een drukking opwaarts ondervindt, een ander, op dezelfde vertikaal gelegen element voor, dat in tegenovergestelde richting gedrukt wordt. Het verschil van beide krachten zal het verschil zijn van de gewichten der zuilen vloeistof die de gemeenschappelijke projectie $v \cos. \gamma$ van beide elementen op de vrije oppervlakte tot grondvlak en hunnen afstand beneden deze tot hoogte hebben; d. w. z., het zal gelijk zijn aan een zuil vloeistof, wier grondvlak het eene en wier bovenvlak het andere element is. Is het lichaam slechts gedeeltelijk ingedompeld dan komen er in het algemeen onder het teeken Σ behalve gepaarde elementen als de zoo even genoemden nog andere voor, die opwaarts worden gedrukt door een kracht $s v \cos. \gamma h$ terwijl op hun vertikaal een element ligt dat niet ingedompeld is en dus ook geene drukking benedenwaarts ondervindt. Daar h de afstand is waarop zulk een element ligt beneden de vrije oppervlakte, zal dus ook weder ieder dezer termen tot de geheele opwaarts gerichte drukking zooveel bijdragen, als het gewicht bedraagt van de zuil vloeistof, die de projectie van dat element op de vrije oppervlakte tot grondvlak en zijn afstand beneden haar tot hoogte heeft. De som van deze termen zal dus wederom het gewicht voorstellen van de zuil vloeistof, die de som der genoemde elementen tot bovenvlak en de som van hunne projectiën op de vrije oppervlakte tot grondvlak heeft. Dus wordt een lichaam, dat in een vloeistof is gedompeld, naar boven gedreven door een kracht, die gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof.

Is het absolute gewicht van het lichaam grooter dan dat van een volume vloeistof gelijk aan het zijne, dan zal het in die vloeistof zinken. In het tegenovergestelde geval zal het daarin

drijven, waarbij dan van zijn gansche volume zooveel onder de vrije oppervlakte zal liggen, dat het gewicht van de daardoor verplaatste vloeistof aan het gansche absolute gewicht van het lichaam gelijk is.

De omstandigheid, dat een lichaam, als het geheel is ingedompeld in een vloeistof, juist zooveel van zijn gewicht schijnt te verliezen als het gewicht bedraagt van een volume vloeistof gelijk aan het zijne, geeft een eenvoudig middel aan de hand om van elk willekeurig lichaam den inhoud te bepalen. Is toch s het gewicht van de kubieke eenheid der vloeistof, V het volume van het lichaam, P zijn gewicht in de lucht, P' zijn gewicht in de vloeistof, dan is

$$s V = P - P'$$

of

$$V = \frac{P - P'}{s}.$$

Kent men dus het gewicht van de kubieke eenheid vloeistof, dan zal het getal, dat uitdrukt hoeveel malen dit begrepen is in het gewichtsverlies, tevens uitdrukken hoeveel van die eenheden het lichaam bevat.

Is s' het gewicht van de kubieke eenheid der stof, waaruit het lichaam bestaat, dan is

$$P = V s'$$

waaruit

$$s' = \frac{P}{V}$$

of, na substitutie van de zoo even gevondene waarde voor V

$$s' = \frac{P}{P - P'} s.$$

Geschiedt dus de bepaling van het gewichtsverlies terwijl het lichaam gedompeld is in zuiver water, — wordt dus $s = 1$ — dan zal het getal, dat uitdrukt hoeveel malen het gewichtsverlies in het gewicht begrepen is, onmiddellijk in dezelfde eenheid het gewicht uitdrukken van de kubieke eenheid der stof, waaruit het lichaam bestaat.

Om het specifiek gewicht eener vloeistof te bepalen zal men een lichaam, waarvan men het absolute gewicht kent, slechts behoeven te wegen, terwijl het beurtelings is gedompeld in de vloeistof en in die, aan wier kubieke eenheid men de eenheid van gewicht toekent. Het getal, dat aangeeft hoeveel malen het laatste gewichtsverlies in het eerste begrepen is, zal dan tevens uitdrukken hoeveel in diezelfde gewichts-eenheden de kubieke eenheid der vloeistof weegt.

Daar een lichaam in een vloeistof drijft als het zoover is ingedompeld, dat het gewicht van de verplaatste vloeistof gelijk is aan het zijne, zullen de diepten, waarop een cilindervormig lichaam in verschillende stoffen zinkt, *omgekeerd evenredig* zijn met de gewichten van gelijke volumina dezer vloeistoffen. **Araeometers met constant gewicht.**

Zorgt men daarentegen, door telkens zijn gewicht te veranderen, dat een cilindervormig lichaam in verschillende vloeistoffen steeds even ver is ingedompeld, dan zullen de gewichten, die het bij die verschillende proefnemingen heeft, *rechtstreeks evenredig* zijn met de gewichten van gelijke volumina dezer vloeistoffen. **Araeometers met constant volume.**

36. De richting van de drukking opwaarts, die een vloeistof op een in haar drijvend lichaam uitoefent, gaat door het zwaartepunt van het volume der verplaatste vloeistof. De ligging van haar aangrijpingspunt hangt dus alleen af van den vorm, dien het ingedompelde deel des lichaams heeft, en niet van de wijze, waarop de massa daarin verdeeld is. Zal het lichaam in evenwicht zijn, dan is het noodig dat zijn eigen zwaartepunt met dat aangrijpingspunt ligt op dezelfde vertikaal. De lijn, die door deze beide punten gaat, noemt men de *as* van 't drijvende lichaam, een vlak, dat loodrecht op haar staat en samenvalt met de vrije oppervlakte der vloeistof, zijn **drijfvlak**.

Wordt het zwaartepunt van het lichaam verplaatst — bijv. van een schip door eene verandering in de ligging van de lading — dan zal dus tevens de *as* van richting veranderen, en het lichaam, in den evenwichtstoestand terugkomende, in een an-

deren stand gaan drijven. Toch zal daarbij de as niet gaan door het nieuwe zwaartepunt en het vroegere aangrijpingspunt van de opwaarts gerichte drukking. Immers, zoodra het lichaam van stand verandert, ondergaat tevens het ingedompeld volume, schoon zijn grootte onveranderd blijft, eene verandering van gedaante en met deze ook het zwaartepunt van dat volume. Blijft het zwaartepunt van de drijvende massa bij eene zoodanige verplaatsing onder het zwaartepunt van de verplaatste vloeistof, dan zal het lichaam in stabiel evenwicht zijn; want wijkt het even van den stand af waarbij het in evenwicht is, dan zal er een koppel ontstaan, dat het tot dien stand tracht terug te voeren. Toch is zulk een verplaatsing als zij een geladen schip treft — het werken der lading — een ramp te noemen, daar het, naar eene zijde overhellende, niet meer aan het roer gehoorzaamt en zodoende een speelbal wordt van wind en golven.

Het geval kan zich echter voordoen, dat het zwaartepunt van het lichaam zelf niet verplaatst wordt, terwijl het toch door een van buiten daarop werkende kracht uit zijn evenwichtstoestand wordt gebracht. Zoo bijv. zal een schip door de drukking van den wind tegen de zeilen naar eene zijde gaan overhellen. Ligt nu het zwaartepunt boven het aangrijpingspunt, en bij sommige vaartuigen, wier zeilen, vooral bij nat weder, in betrekking tot het gewicht van het schip zelf zeer zwaar zijn, is dit lichtelijk het geval, dan zou een oppervlakkige beschouwing tot het besluit kunnen voeren, dat het schip noodzakelijk moet omslaan. Immers het gewicht van het geheel, dat in het zwaartepunt aangrijpt, en de opstuwende kracht vormen alsdan een koppel die dit omslaan zal trachten te bewerken. Toch leert eene meer aandachtige beschouwing het door de ervaring bevestigde tegendeel kennen als het gevolg van de verplaatsing, die bij een overhellen naar eene zijde ook het aangrijpingspunt van de opstuwende kracht ondervindt.

Zij in Fig. 85 het lichaam voorgesteld in zijn hellenden stand, A B de as, die met de vertikaal samenvalt als het in evenwicht is, K in dien evenwichtstoestand het aangrijpings-

punt der opstuwende kracht, Z het zwaartepunt van het lichaam.

Toen het lichaam dreef in den toestand van labiel evenwicht, was het gedeelte $C B D$ ingedompeld; in den hellenden stand,

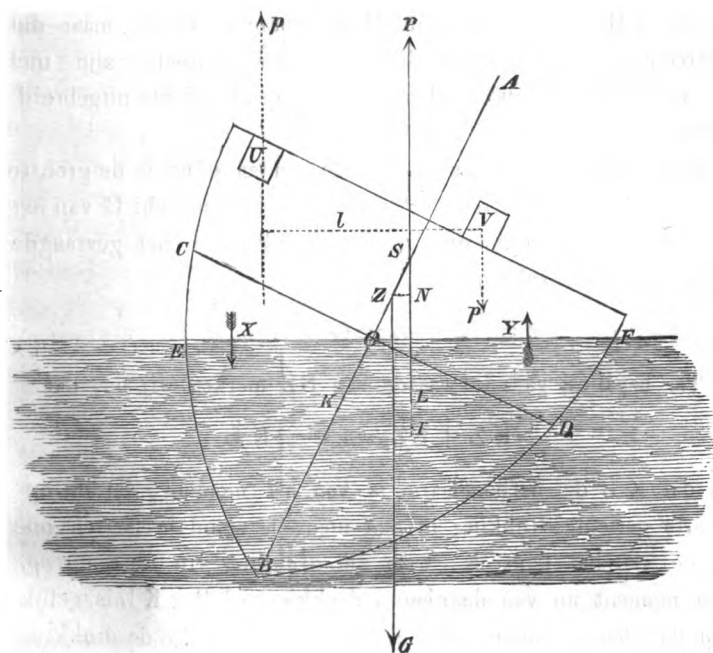


Fig. 85.

dien het thans heeft, is echter links van de as een gedeelte $C O E$ boven de vloeistof gekomen, terwijl rechts van de as een even groot volume $F O D$, dat vroeger boven de vloeistof zich bevond, nu ingedompeld is. Het aangrijppingspunt der evenwijdige opstuwende krachten zal dus rechts van K , bijv. in I , komen te vallen.

Het gewicht G en de opwaarts gerichte drukking P zullen dus, zoolang het punt S , waar de richting van deze de hellende as $A B$ snijdt, boven het zwaartepunt Z ligt, een koppel vormen, dat het lichaam naar den evenwichts-toestand tracht terug te voeren.

Wij zullen de grootte van dat koppel bepalen voor den schuin-

schen stand, waarbij de as met de vertikaal den hoek α maakt. Daarbij zullen wij aannemen, en in de practijk, bij schepen bijv., is dit meestal ten naastenbij het geval, dat het lichaam niet alleen symmetrisch is ten opzichte van een vlak dat door de as AB en loodrecht op CD gebracht wordt, maar dat daarenboven de ingedompelde volumina evenredig zijn met de in doorsnede als zoodanig voorkomende vlakke-uitgebreidheden.

Zoowel in den nieuwen als in den ouden stand is de grootte van de opstuwende kracht P gelijk aan het gewicht G van het lichaam. Wij hebben dus reeds dadelijk voor het gevraagde moment de uitdrukking:

$$44. \dots M = G \cdot NZ = G \cdot SZ \sin. \alpha.$$

Ter bepaling van de waarde van SZ merken wij op, dat

$$(KZ + SZ) \sin. \alpha = KL$$

en dat KL de hefboomsarm is van het moment, dat de opwaarts gerichte drukking in den nieuwen stand heeft, ten opzichte van het punt K , waar die drukking vroeger aangreep. Het moment nu van de nieuwe drukking of $P \times KL$ is gelijk aan dat van de oude, vermeerderd met dat van de drukking die ontstaan is door de indompeling van FOD , en verminderd met dat van de drukking, die vroeger ontstond doordien COE zich toen onder de oppervlakte der vloeistof bevond. Ten opzichte van het punt K is het moment der vroeger opstuwende kracht *nul*, en de genoemde vermeerdering en vermindering, die beide evenredig zijn aan de vlakke-uitgebreidheden FOD en COE , vormen te zamen een koppel, werkende aan den hefboomsarm XY .

Wij hebben dus, als wij aannemen dat COE en FOD cirkel-sectoren zijn, die OC tot straal hebben en $OC \cdot \alpha$ tot boog,

$$P \times KL = s \cdot \frac{1}{2} OC^2 \alpha \cdot XY = s \cdot \frac{2}{3} OC^3 \cdot \alpha \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha}$$

als s het specifiek gewicht is van de vloeistof.

Stelt nu V de uitgebreidheid van de gansche ingedompelde vlakke $E B D F$ voor, dan is

$$P = s \cdot V$$

en dus

$$K L = \frac{2}{3} \cdot \frac{O C^3}{V} \alpha \frac{\sin. \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{O C^3}{V} \cdot 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha.$$

Substitueert men deze waarde in de vergel. (44) dan wordt zij

$$(K Z + S Z) \sin. \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{O C^3}{V} \cdot 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha,$$

waaruit

$$S Z = \frac{2}{3} \frac{O C^3}{V} \cdot \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \alpha}{\sin. \alpha} - K Z$$

of

$$S Z = \frac{C D^3}{12 V} \cdot \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \alpha}{\sin. \alpha} - K Z.$$

Voor kleine waarden van α dus is, omdat men daarvoor $2 \sin. \frac{1}{2} \alpha = \sin. \alpha$ kan stellen,

$$45 \dots \dots S Z = \frac{C D^3}{12 V} - K Z$$

en dus de afstand van S tot Z onafhankelijk van de grootte van dien hoek.

Voor kleine schommelingen, die een drijvend lichaam maakt om den evenwichts-stand, blijft dus het punt, waar de as door de vertikaal van het zwaartepunt der verplaatste vloeistof wordt gesneden, steeds op denzelfden afstand van het zwaartepunt van het lichaam.

Men heeft dat snijpunt het metacentrum genoemd.

Is $S Z$ positief, dus $\frac{C D^3}{12 V} > K Z$, dan zal het in vergel. 44 voorgestelde moment, het lichaam trachten terug te brengen in den stand van evenwicht. Ligt dus het metacentrum boven het zwaartepunt, dan zal ook na een afwijking grooter dan die

waarvoor men $2 \sin. \frac{1}{2} \alpha = \sin. \alpha$ mag stellen het lichaam terugkeeren tot dien stand. Want alsdan is $2 \sin. \frac{1}{2} \alpha > \sin. \alpha$ en dus de eerste term in de meer nauwkeurige uitdrukking voor SZ grooter dan $\frac{CD^3}{12V}$.

Waar het metacentrum van eenig lichaam gelegen is, laat zich, zelfs met behulp van de vergelijking 45, moeilijk bepalen. Want de waarden van V en CD kunnen alleen bij prismatische lichamen met juistheid worden in rekening gebracht. Bij alle lichamen, wier gedaante afwijkt van de prismatische, zijn beide waarden verschillend voor de verschillende vertikale doorsneden. Eene praktische bepaling echter, die dus in de meeste gevallen de voorkeur verdient, grondt zich op de volgende zeer eenvoudige beschouwing. Als men, terwijl het lichaam drijft met vertikaal gerichte as, in U (Fig. 85) een gedeelte van zijn massa wegneemt, waarvan p het gewicht is, en het verplaatst naar V , dan zal de as voor een oogenblik den schuin-schen stand AB aannemen, om, als het metacentrum ligt boven het zwaartepunt, spoedig daarop weder terug te keeren tot den vertikalen stand.

Daar er nu, volgens vergel. 44, een moment

$$M = G \cdot SZ \sin. \alpha$$

wordt vereischt om het lichaam in dien stand te brengen, waarbij de as met de vertikaal den hoek α maakt, en dit verkregen is door aanwending van het koppel $p l$, zal

$$p l = G \cdot SZ \sin. \alpha$$

of

$$46 \dots \dots SZ = \frac{p}{G} \cdot \frac{l}{\sin. \alpha}$$

zijn.

Verplaatst men dus op een schip een last, wiens gewicht men kent, van het eene boord naar het andere en neemt men waar hoeveel de mast daardoor, voor hij zich weder vertikaal stelt, van dien vertikalen stand is afgeweken, (α), dan zal men door middel van vergelijking 46 den afstand kunnen bepalen, waarop het metacentrum boven het zwaartepunt ligt.

Voorbeelden.

17. Tot hoe diep zal een regelmatige pyramide, die 8 decim. hoog is, zinken in water, als zijn specif. gew. 0.657 kil. bedraagt en zijn top naar boven is gekeerd?

Antw. 2.4 decim.

18. In welken toestand van evenwicht verkeert deze pyramide?

Antw. Het zwaartepunt ligt 0.016 decim. boven het ondersteuningspunt.

19. Tot hoe diep zal die pyramide in het water zinken als haar top benedenwaarts is gekeerd, en in welken toestand van evenwicht verkeert zij dan?

Antw. 6.96 decim. en het zwaartepunt ligt 0.78 decim. boven het steunpunt.

20. Een araeometer weegt 50 grammes en zinkt door een belasting van 4 grammes, 20 millimeters dieper dan het nulpunt in zuiver water.

Hoe ver moeten de strepen van de schaal, die een specif. gewicht 0.95, 0.9, 0.85, 0.8 enz. aanwijzen, boven het nulpunt liggen?

Antw. Als s het spec. gewicht der vloeistof is, zal de ligging der strepen

door de formule $25 \cdot \frac{1-s}{s}$ in dit geval bepaald worden; dus op een

afstand van 1.32, 2.78, 4.41, 6.25 centim. boven het nulpunt.

21. Een araeometer van NICHOLSON, die 40 grammes weegt, zinkt in zuiver water tot het daarop aangebracht teeken als zij bezwaard is met 12 grammes. Welk specifiek gewicht heeft de vloeistof, waarin hij door een belasting met 8 grammes even diep zinkt?

Antw. 0.923 ongeveer.

22. Als de mast van een schip 12' afwijkt van den vertikalen stand, doordien men een last, wiens gewicht $\frac{1}{100}$ van dat van het schip bedraagt, in de richting van het eene boord na het andere 3 meters verplaatst, hoe hoog ligt dan het metacentrum boven het zwaartepunt?

Antw. 8.62 meters ongeveer.

IV.

DYNAMICA VAN DRUPVORMIGE VLOEISTOFFEN.

ZEVENDE HOOFDSTUK.

Over het uitstroomen van vloeistoffen door openingen en door buizen.

37. Vooronderstellen wij thans, dat een vat gevuld is met een vloeistof, en dat men ergens, hetzij in den zijwand, hetzij in den bodem, een opening maakt wier doorsnede een inhoud heeft van v vlakke-eenheden. De vloeistof zal dan uit het vat loopen met een zekere snelheid s die ten gevolge heeft, dat in den tijd t een hoeveelheid water wegloopt, wier volume wordt voorgesteld door $v s t$. De hoogte van den waterspiegel in het vat zal daardoor in den tijd t

$$47 \dots\dots\dots \frac{v}{V} s t$$

lengte-eenheden dalen, als de loodrechte doorsnede van het vat een inhoud heeft van V vlakke-eenheden.

Bij onze beschouwingen willen wij echter aanvankelijk aannemen, dat v ten opzichte van V klein genoeg is om het er

voor te mogen houden, dat de hoogte H , waarop de vloeistof in het vat boven de opening staat, onveranderd blijft gedurende den tijd t .

Om uit het vat te kunnen vloeien moeten de deeltjes vloeistof, die nabij de opening liggen, in beweging worden gezet. De kracht die deze beweging zal veroorzaken is de drukking van de zuil vloeistof, die boven de opening staat, en deze heeft, als k het specifiek gewicht der vloeistof is, $k v H$ tot uitdrukking. In den tijd t doorloopt elk deeltje een weg s in de richting van de kracht; want de kracht staat loodrecht op de opening, en als deze voorzien is van een horizontale buis, zal in hem het deeltje vloeistof zijnen weg $s t$ afleggen onder den invloed dier kracht alleen. De in den tijd t vereischte arbeid is dus (D. I, § 72)

$$k v H . s t.$$

Deze arbeid kan echter ook worden uitgedrukt door (D. II. § 10) de toename van de levendige kracht der vloeistof. Daar zij uit den toestand van rust overgaat in die van beweging, is de levendige kracht die aan de snelheid s beantwoordt, in haar geheel toename van levendige kracht. En dewijl de massa van het in den tijd t in beweging gebrachte water $\frac{k}{g} . v s t$ is, ($g = 9,812 \dots$) zal de levendige kracht

$$\frac{k}{g} v s t \frac{s^2}{2}$$

zijn.

Uit de gelijkstelling van beide voor den arbeid gevondene waarden

$$\frac{k}{g} v s t . \frac{s^2}{2} = k v H s t$$

volgt

$$48 \dots \dots s = \sqrt{2 g H},$$

dat wil zeggen:

de snelheid, waarmede een vloeistof door haar eigen gewicht stroomt uit een vat, is gelijk aan de snelheid, die (D. II. § 5) een lichaam

zal hebben verkregen, als het gevallen is van een hoogte, gelijk aan die waarop de vloeistof staat boven de opening waar zij uitstroomt.

Deze waarde zal men lichtelijk voor iets te klein houden, omdat wij hebben aangenomen dat de kracht werd besteed om deeltjes in beweging te brengen die geheel in rust waren, terwijl zij toch inderdaad reeds aan de dalende beweging van den waterspiegel deel namen. Maar dit verschil is zeer gering, vooral als men vooronderstelt, dat de doorsnede van de opening zeer klein is in verhouding tot die van het vat zelf.

Veel grooter is in elk geval een andere onnauwkeurigheid in de voor de snelheid gevondene waarde; ook zij is een gevolg daarvan dat in de werkelijkheid niet voldaan wordt aan de vooronderstelling dat gedurende de eenheid van tijd de kracht constant blijft. Immers zij neemt voortdurend af, zoodat de snelheid steeds kleiner dan $\sqrt{2gH}$ zijn zal.

Door proefnemingen heeft men bepaald welk gedeelte van $\sqrt{2gH}$ de werkelijke snelheid bij verschillende vloeistoffen is. De waarden van deze breuken, die men coëfficiënten van snelheid heeft genoemd, zijn in tabellen verzameld. Voor water is 0.97 zijne waarde.

38. Neemt men aan, dat de vloeistof even hoog staat boven elk punt der opening, dan wordt de berekening van de hoeveelheid vloeistof, die in een sekonde wegvloeit, zeer eenvoudig. Zij zal gelijk zijn aan den inhoud van een zuil, die de opening tot grondvlak en de in een sekonde doorloopen weg tot hoogte heeft.

Maar neemt men aan dat aan elken kleinen rechthoek, wiens breedte b gelijk aan die der opening en wiens hoogte een zeer klein deeltje Δz van den afstand z tot den waterspiegel is, een andere hoogte beantwoordt, dan wordt de uitdrukking $b \sum s \Delta z$ de som van een oneindig aantal termen, die elk in 't bijzonder oneindig klein zijn. De in haar voortkomende snelheid ook in funtie van de veranderlijke hoogte uitdrukken, wordt zij

$$b \sum \sqrt{2gz} \Delta z = b \sqrt{2g} \sum \sqrt{z} \cdot \Delta z.$$

In elke van het oneindig aantal termen onder het teeken Σ heeft z eene andere waarde; als de grootste, H , beantwoordt aan de hoogte van den waterspiegel boven het laagste punt der opening, en de kleinste, h , aan die boven het hoogst gelegen punt, dan is de waarde dier som, die wij hier niet kunnen ontwikkelen,

$$\frac{2}{3} b \sqrt{2g(HvH - hVh)}.$$

Stelt men in haar $h = 0$, waardoor zij onder anderen geldt voor het geval dat uit een kanaal water stroomt in een ander, dan wordt zij:

$$\frac{2}{3} b h \sqrt{2gH}.$$

39. Op de vraag hoe lang het duren zal, eer de vloeistof in het vat tot beneden de opening gedaald is, is het antwoord gemakkelijk te vinden. Reeds in § 37 zagen wij, dat

$$\frac{v}{V}^2$$

de uitdrukking is voor de snelheid, waarmede de waterspiegel daalt. Is dan z de steeds afnemende hoogte van dien waterspiegel boven de opening, dan zal

$$\frac{v}{V} \sqrt{2gz}$$

volgens § 37 deze steeds afnemende snelheid voorstellen. Deze uitdrukking doet ons zien, dat de dalende beweging van den waterspiegel een gelijkmatig vertragende is, en dat hare vertraging $g \frac{v^2}{V^2}$ tot uitdrukking heeft. Is nu aanvankelijk de hoogte boven de opening H , dus H de weg, dien de waterspiegel met de gelijkmatige vertraging $g \frac{v^2}{V^2}$ doorloopt, dan volgt uit

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \frac{v^2}{V^2} \cdot t^2$$

dat de gevraagde tijd

$$t = \frac{V}{v} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

zijn zal.

Bij schutsluizen bevindt zich de opening aan beide zijden van de deuren onder water. Bij een bepaald verschil in de hoogte van het water in twee aangrenzende afdeelingen der sluis, kan men, op grond van het zoo even verklaarde, den tijd bepalen, die er noodig zal zijn om in beide het water op dezelfde hoogte te brengen.

Stel dat het water in de eene afdeeling z meters boven en in de andere z' meters beneden dit niveau staat, dan zijn z en z' grootheden, die gedurende het uitstroomen gelijktijdig tot nul naderen. Het verval is dan steeds $z + z'$ meters en de veranderlijke snelheid van de uitstrooming

$$s = \sqrt{2g(z + z')}.$$

Zij nu V het aantal vlakke-eenheden van de doorsnede der afdeeling, waaruit V' dat van de doorsnede der afdeeling waarin het water stroomt, v dat van de opening in de deur. Steeds is dan in de eene afdeeling Vz kubieke eenheden water meer, en in de andere $V'z'$ kubieke eenheden minder, dan op het oogenblik dat de waterspiegel in beide ligt in een vlak. Daar het meerdere in de eene het mindere in de andere moet aanvullen is $Vz = V'z'$ of

$$z' = \frac{V}{V'} z.$$

Door de substitutie van deze waarde wordt

$$s = \sqrt{2g\left(z + \frac{V}{V'}z\right)} = \sqrt{2gz\left(1 + \frac{V}{V'}\right)}$$

de snelheid der uitstrooming en dus

$$s' = s \frac{v}{V} = \frac{v}{V} \sqrt{2gz\left(1 + \frac{V}{V'}\right)}$$

de snelheid, waarmee in de eene afdeeling het water daalt.

Schrijft men deze uitdrukking in de gedaante

$$s' = \sqrt{2g \frac{v^2}{V^2} \left(1 + \frac{V}{V'}\right) z},$$

dan blijkt het dat de dalende beweging eene gelijkmatig vertragende is, wier vertraging $g \frac{v^2}{V^2} \left(1 + \frac{V}{V'}\right)$ bedraagt.

De waterspiegel zal dus z meters dalen in den tijd, die voldoet aan de vergelijking

$$z = \frac{1}{2} g \frac{v^2}{V^2} \left(1 + \frac{V}{V'}\right) t^2;$$

waaruit

$$t = \frac{V}{v} \sqrt{\frac{2 V'}{g (V + V')}} \cdot z.$$

Als men dus vooronderstelt dat de vertikale afstand

$$z + z' = z \left(1 + \frac{V}{V'}\right)$$

der beide waterspiegels bij den aanvang van de aftapping H meters bedroeg, dan zal

$$t = \frac{V}{v} \sqrt{\frac{2 V'}{g (V + V')}} \cdot \frac{V' H}{V + V'} = \frac{V'}{\left(1 + \frac{V}{V'}\right) v} \sqrt{\frac{2 H}{g}}$$

de tijd zijn, waarin beide in hetzelfde vlak komen te liggen.

Stroomt het buitenwater in een sluis dan zal V' zoo klein zijn ten opzichte van V , dat men $\frac{V'}{V} = 0$ mag stellen. In dit geval wordt de gevraagde tijd dus

$$t = \frac{V'}{v} \sqrt{\frac{2 H}{g}},$$

zoodat hij juist de helft zal zijn van den tijd, die in gelijke omstandigheden noodig is om het water in twee aan elkander grenzende afdeelingen eener sluis, die dezelfde doorsnede hebben, te brengen op dezelfde hoogte. Dan toch zal

$$t = \frac{V'}{2 v} \sqrt{\frac{2 H}{g}}$$

zijn.

40. De in § 38 verkregene waarden voor de hoeveelheden

vloeistof, die in een bepaalden tijd door eene opening uitstroomen, zijn iets grooter, en diensgevolge is ook de in § 39 gevonden duur der uitstrooming iets kleiner, dan in de werkelijkheid zal worden gevonden. Dit verschil wordt gedeeltelijk veroorzaakt doordien wij steeds voor de snelheid der uitstrooming $\sqrt{2gh}$ hebben gesteld, zonder den aan het einde van § 37 genoemden coëfficiënt in rekening te brengen. In sommige omstandigheden echter wordt de hoeveelheid uitstroomende vloeistof nog in veel grootere mate verminderd door de contractie, die de straal steeds op kleinen afstand buiten de opening ondervindt.

Wanneer de opening v vlakke-eenheden groot is, zal dus de doorsnede van den straal daar minder dan v vlakke-eenheden bevatten, zoodat dan ook de in t sekonden uitstroomende hoeveelheid vloeistof minder dan svt kubieke eenheden zijn zal. Ook de waarden der coëfficiënten, waarmede v moet vermenigvuldigd worden, om deze hoeveelheid te doen overeenstemmen met de werkelijk uitstroomende, heeft men door waarneming bepaald. Men heeft gevonden, dat die contractie hare grootste waarde bereikt, als de wand zelf zeer dun is of rondom de opening van buiten naar binnen scherp toeloopt, en als daarbij de doorsnede der opening zeer klein is, in verhouding tot de oppervlakte van den wand waarin zij is gemaakt. Voor water is in deze omstandigheden 0.64 de coëfficiënt van contractie, terwijl deze hare grootste waarde bereikt op een afstand van de opening, die ongeveer gelijk is aan de helft van hare middellijn. Laat men het water, in plaats van door eene opening van v vlakke-eenheden, uitstroomen door een buis die op genoemden afstand slechts eene doorsnede heeft van 0.64 v vlakke-eenheden, dan zal de in een bepaalden tijd uitstroomende hoeveelheid water daardoor niet veranderen. De grootte der contractie neemt echter spoedig af met de scherpte van de randen der opening; slijpt men deze zooveel mogelijk rond, dan zal men het invoeren van den coëfficiënt achterwege kunnen laten.

41. De drukking, die een vloeistof uitoefent op de wanden van het vat waarin zij zich bevindt, heeft, als de vloeistof in beweging is, over het algemeen eene andere waarde, dan wanneer zij in rust is. Terwijl deze hydrostatische drukking op eenig deeltje van den wand gelijk is aan het gewicht van een zuil vloeistof, die dat deeltje tot grondvlak en zijn afstand tot de vrije oppervlakte tot hoogte heeft (§ 33), zal de hoogte x van de zuil, wier gewicht de hydraulische drukking voorstelt, in het algemeen eene andere zijn.

Vooronderstellen wij, dat de vrije oppervlakte van de vloeistof in het vat h meters boven de opening staat, waardoor zij uitstroomt, dan zal (§ 37)

$$k v h s t$$

de arbeid zijn van de kracht, die de deeltjes vloeistof drijft door de opening.

Ligt echter de opening zelve h' meters beneden de oppervlakte van de vloeistof die het vat omringt, dan is

$$- k v h' s t$$

de weerstands-arbeid, die in t sekonden wordt verricht en de strekking heeft om de vloeistof in de opening terug te dringen.

De arbeid derhalve, waardoor versnelling der uitstrooming wordt teweeggebracht, heeft

$$k v (h - h') s t$$

of

$$m g (h - h')$$

tot uitdrukking, daar toch $m g = k v s t$ het gewicht voorstelt van de in t sekonden uitstroomende hoeveelheid vloeistof.

Is nu de snelheid, waarmede de vrije oppervlakte daalt, a , dan zal

$$\frac{m s^2}{2} - \frac{m a^2}{2} = m g (h - h')$$

zijn, of

$$48 \dots \dots s^2 = a^2 + 2g (h - h').$$

Ligt de doorsnede van het vat, voor welke de hydraulische drukking aan x evenredig is, op een afstand van

x' meters beneden de vrije oppervlakte, en daalt die doorsnede met een snelheid b , dan zal evenzoo

$$49 \dots s^2 = b^2 + 2g((h - h') - x' + x)$$

zijn.

Substituëert men de waarde van s^2 uit vergel. (48) in vergel. (49) dan komt er

$$x = x' - \frac{b^2 - a^2}{2g}$$

waaruit blijkt:

dat de hydraulische drukking in eenig vlak kleiner is dan de hydrostatische, als de snelheid waarmede het daalt grooter is dan de snelheid der vrije oppervlakte.

Deze grootere snelheid heerscht, zooals gemakkelijk is in te zien, in die doorsneden van het vat, waar dit nauwer is dan aan de vrije oppervlakte. Waar het vat zeer nauw is kan zelfs $\frac{b^2 - a^2}{2g}$

zoo weinig van x verschillen, dat de grootte van de hydraulische drukking daar nagenoeg *nul* wordt. Maakt men daar plotseling een opening in den wand, dan zal de dampkringslucht naar binnen worden gedreven, gelijk zij ook door een buis, die daar uitmondt, vloeistof in het vat zal kunnen opdrijven uit een diepte, gelijk aan de lengte der zuil, wier gewicht de overmaat aan dampkrings-drukking boven de hydraulische evenaart.

42. Stroomt de vloeistof uit een gevuld vat door eene opening, die wijder is dan de doorsnede eener vernauwing, dan zal er op de hoogte van deze eene geheel ledige ruimte ontstaan. Want onder uit het vat vloeit dan aanvankelijk meer vloeistof weg dan in denzelfden tijd door de vernauwing uit het bovenste gedeelte kan stroomen in het onderste. Er zal ten laatste een nieuwe waterspiegel zich vormen in dit gedeelte, die zoo hoog boven de opening komt te staan, dat er bij de aan die hoogte beantwoordende drukking evenveel water wegstroomt als er toevloeit. Toch geschiedt nu het wegvloeien onder gunstiger omstandigheden dan wanneer de opening zelve eene door-

snede had even klein als de vernauwing. In dit geval toch zou de dampkringslucht eene tegendrukking nitoeffenen, terwijl nu de snelheid der uitstrooming dezelfde is als wanneer de opening was geplaatst in het luchtledige. Het is om deze zelfde reden, dat men de uitstrooming door openingen van bepaalde doorsnede kan versnellen, door die openingen te voorzien van kegelvormige buizen. Ook in dit geval is de hoeveelheid uitstroomende vloeistof dezelfde als wanneer het uitstroomen plaats had door eene opening, die wel is waar dezelfde doorsnede heeft als de gegevene, maar die dan toch omringd is door een gedeeltelijk luchtledige ruimte.

Stroomt een vloeistof door een stelsel van buizen, die verschillende doorsneden hebben, dan moet men er wel op letten, dat bij elken plotselingen overgang in een wijdere buis de hydraulische drukking vermindert. Immers in de nauwere buizen is de snelheid, waarmede zich de vloeistof beweegt, grooter dan in de wijdere, zoodat er bij zoodanigen overgang eene botsing plaats heeft, overeenkomstig met de botsing van vaste lichamen, die wij in § 22 beschreven. Bij zulk eene botsing nu gaat schijnbaar steeds (§ 28) mechanische arbeid verloren, en dit zal nog veel meer het geval zijn bij eene botsing tusschen vloeistoffen, wier deeltjes zoo gemakkelijk ten opzichte van elkander zich verplaatsen.

Nog kan bij eene beweging der vloeistof door een stelsel van buizen, dat eene aanmerkelijke lengte heeft, het verlies aan hydraulische drukking niet verwaarloosd worden, dat een gevolg is van de wrijving langs de wanden der buizen. Deze wrijving hangt af van de lengte der buizen, zoowel als van de grootte harer doorsneden en van de snelheid waarmede de vloeistof uitstroomt; daarenboven echter is zij afhankelijk van een wrijvings-coëfficiënt, wiens waarde met die snelheid verandert en bepaald kan worden uit de door WEISS-BACH gevondene experimenteele formule

$$f = 0.01439 + \frac{0.0094711}{\sqrt{v}}$$

waarin v de snelheid voorstelt.

Eindelijk gaat van de oorspronkelijke drukking een aanmerkelijk gedeelte verloren wanneer een vloeistof uit eene buis stroomt in eene andere, die met haar een hoek maakt. Dit verlies hangt af van de grootte van dien hoek en kan, als hij wordt voorgesteld door 2α , berekend worden uit de experimenteele formule

$$f' = 0,9457 \sin^2 \alpha + 2,047 \sin^4 \alpha;$$

die evenzoo door WEISSBACH is gevonden.

43. Als een vloeistof in rust is dan drukt, zooals wij boven (§ 34) zagen, op elke vlakke-uitgebreidheid v van de wanden een gewicht $k v h$, als k het specifiek gewicht der vloeistof is en h de afstand, waarop het zwaartepunt van v ligt beneden de vrije oppervlakte. Tegenover dit willekeurig gekozen gedeelte van den zijwand staat een ander, dat eene drukking ondervindt wier horizontale ontbondene alleen in teeken van de zoo even genoemde verschilt, en het is deze omstandigheid die veroorzaakt, dat de som van de horizontale tegendrukkingen door den ganschen wand uitgeoefend, *nul* is. Het spreekt wel van zelf, dat, wanneer het gedeelte v van den zijwand ergens plotseling wordt weggenomen, deze evenwichtstoestand wordt verbroken, en dat de in horizontale richting ontbondene van de tegendrukking, die het tegenoverstaande gedeelte van den zijwand biedt, alsdan een kracht wordt, die de vloeistof drijft door de opening. Nemen wij aan dat zij in eene sekonde eene massa m in horizontale richting s lengte-eenheden voordrijft, en dat M en S na een sekonde de massa en de horizontale snelheid van de gansche hoeveelheid vloeistof voorstellen, dan zal (§ 21)

$$M S = m s$$

zijn.

De versnelling in horizontale richting is dus $V = \frac{m}{M} S$ en de kracht K , die haar veroorzaakt, $K = M \frac{m}{M} s = m s$.

De massa m nu, die in de eerste sekonde uitstroomt, heeft

bij de vooronderstelde doorsnede der opening $\frac{k v s}{g}$ tot uitdrukking, zoodat

$$K = \frac{k v}{g} s^2$$

is. Bij de in den aanvang dezer § vooronderstelde hoogte h van den waterspiegel boven de opening is (§ 37) echter

$$s^2 = 2 g h.$$

Dus wordt

$$K = 2 k v h$$

de grootte van de kracht, waarmede in horizontale richting de vloeistof uit de opening wordt gedrongen. De wanden van het vat ondergaan eene gelijke drukking, wier resultante een lijnrechte tegenovergestelde richting heeft; als dus het vat zich zonder wrijving kon bewegen over het vlak waarop het staat, dan zou het zich gaan bewegen in eene richting tegenovergesteld aan die, waarin zich de uitstroomende vloeistof beweegt.

V.

MECHANICA DER GASVORMIGE VLOEISTOFFEN.

ACHTSTE HOOFDSTUK.

Over de drukking en het uitstroomen van gassen.

44. Wanneer een zekere hoeveelheid gas zich bevindt in een beslotene ruimte, dan wordt door haar eene drukking uitgeoefend op de wanden die haar omgeven. Deze spanning nu verandert met de ruimte, die het gas inneemt, op eene wijze in de wet van MARIOTTE aldus uitgedrukt:

het volumen van eene zekere massa gas is omgekeerd evenredig met de drukking, die daarop wordt uitgeoefend.

Als dus V en V' de volumina van dezelfde massa gas voorstellen bij de drukking d en d' , dan zal

$$50 \dots\dots\dots V:V' = d':d$$

zijn; met andere woorden het produkt van de bij elkander behoorende waarden voor d en V , het produkt dV dus, zal constant zijn.

Is V het volumen van een zekere massa dampkringslucht bij

den gemiddelden barometerstand, dan is $d = 10336$ kilogram op den vierkanten meter. Om deze massa gas op een derde van haar volumen samengedrukt te houden zal dan, volgens de vergel. 50, eene drukking

$$d' = \frac{V}{V'} d = 3 d = 31008$$

kil. worden vereischt.

45. Wij hebben in de vorige § voorondersteld, dat de temperatuur van het gas gedurende de samendrukking voortdurend dezelfde bleef. Wij zullen nu nagaan in welke betrekking de verandering in volume tot de verandering in spanning staat, als de temperatuur van het gas verandert.

Het is proefondervindelijk gebleken, dat, zoo eene zekere massa gas voortdurend dezelfde drukking blijft ondervinden en men hare temperatuur laat toenemen, de toename van haar volumen aan die van de temperatuur evenredig is. Noemt men c het gedeelte van het oorspronkelijk volumen V , waarmee dit bij eene temperatuurs-verhooging van een graad Celsius wordt vermeerderd, — kubieke coëfficiënt van uitzetting — dan zal bij eene temperatuurs-verhooging van t graden het volumen

$$51 \dots\dots\dots V' = V (1 + c t)$$

zijn. Brengt men nu, door het uitoefenen van eene grootere drukking d'' , de massa gas tot een kleiner volumen V'' terug, en zorgt men daarbij dat de temperatuur niet verandert, dan zal de wet van MARIOTTE gelden. Was dus de drukking aanvankelijk d' , dan is

$$V' : V'' = d'' : d'$$

of

$$V (1 + c t) : V'' = d'' : d',$$

waaruit

$$\frac{V'' d''}{1 + c t} = V d'.$$

Vóór de drukking werd vermeerderd, was (vergel. 51)

$$\frac{V' d'}{1 + c t} = V d';$$

zoodat bij het samendrukken van gassen het quotient

$$\frac{V d}{1 + c t}$$

steeds onveranderd blijft, ook als de temperatuurs-verandering in aanmerking wordt genomen.

Deze meer algemeene opvatting van de wet van MARIOTTE, noemt men de wet van GAY-LUSSAC.

Is k het specifiek gewicht van het gas bij een temperatuur van t graden en k' dat gewicht bij een temperatuur t' , V het volume in het eerste, V' het volume in het tweede geval, en zijn d en d' de voor deze gevallen geldende drukkingen, dan is

$$\frac{V d}{1 + c t} = \frac{V' d'}{1 + c t'}$$

en

$$k V = k' V';$$

uit welke beide vergelijkingen deze eene volgt:

$$\frac{V d}{1 + c t} = \frac{V \frac{k}{k'} d'}{1 + c' t'}$$

of

$$\frac{d}{k \left(\frac{1}{c} + t \right)} = \frac{d'}{k' \left(\frac{1}{c} + t' \right)}.$$

Substitueert men in deze vergelijking voor den coëfficiënt van uitzetting zijne waarde 0.00367, die voor alle gassen nagenoeg dezelfde is, dan komt er

$$\frac{d}{k(273 + t)} = \frac{d'}{k'(273 + t')}.$$

De in deze vergelijking voorkomende waarden van d en t zijn geheel willekeurig genomen, terwijl die van k de met die

willekeurige drukkingen en temperaturen overeenkomende specifieke gewichten zijn. Het quotient $\frac{d}{k(273 + t)}$ is dus een standvastige grootheid. Daar nu gewone dampkringslucht bij een temperatuur van 0° Celsius en eene drukking van 10336 kil. op de □ meter een spec. gewicht 1.293 heeft, zal

$$\frac{10336}{1.293 \times 273} = 29.28$$

onder alle omstandigheden de waarde van dien coëfficiënt zijn voor dampkringslucht. Voor $t = 273^\circ$ zal de drukking 2×10336 en in het algemeen voor $t = n \times 273^\circ$ zal zij $(n + 1) 10336$ millim. zijn, zoodat telkens wanneer de temperatuur van een bepaald volumen dampkringslucht 273° C. stijgt, de drukking een atmosfeer stijgen zal.

Tevens volgt hieruit dat bij een temperatuur van $- 273^\circ$ C. de drukking *nul* zou zijn; daarom heeft men deze temperatuur het absolute nulpunt van de temperatuur genoemd. Van dit nulpunt gerekend zal dus een temperatuur van t° C. door $(273 + t)^\circ$ moeten voorgesteld worden:

46. Tot nog toe beschouwden wij alleen het geval, dat bij toenemende temperatuur de drukking grooter werd en het volumen constant bleef. Beschouwen wij thans het omgekeerde geval, dat bij een stijgende temperatuur voortdurend de drukking dezelfde blijft, maar daarentegen het volumen toeneemt. De hoeveelheid warmte die noodig is om de temperatuur van 1 kilogram gas 1° Celsius te doen stijgen, eene hoeveelheid die men de warmte-capaciteit van het gas noemt, is in beide gevallen zeer verschillend. Heeft de temperatuurs-verhooging plaats bij constant volumen, dan bedraagt die hoeveelheid voor dampkringslucht

$$w_v = 0,1687$$

warmte-eenheden, terwijl zij bij eene temperatuurs-ver-

hooging, die met constante drukking en veranderlijk volumen gepaard gaat,

$$w_d = 0.2377$$

warmte-eenheden bedraagt. De eenheid waarin deze hoeveelheid warmte is uitgedrukt, is de hoeveelheid die noodig is om van een kilogram water de temperatuur 1° C. te doen stijgen. Men noemt haar ook wel eene Calorie.

Om dus een kilogram lucht zóó te verwarmen, dat bij constante drukking d zijn temperatuur t° graden toeneemt, zal eene hoeveelheid warmte w moeten aangevoerd worden, die beantwoordt aan de vergelijking

$$52 \dots\dots w = 0,2377 t,$$

terwijl die hoeveelheid, indien het volumen onveranderd blijft,

$$53 \dots\dots w' = 0.1687 t$$

zal bedragen.

47. De hoeveelheid warmte

$$0,069 t$$

die in het laatste geval meer is gebruikt, ging echter niet verloren. Immers bij het toenemen van het volumen gas is mechanische arbeid verricht, die, als wij die vermeerdering v en de drukking op de vlakke-eenheid d noemen, door

$$A = d v$$

moet worden voorgesteld. Want de arbeid is het product van de kracht en van den weg, dien in hare richting het aangrijpingspunt heeft afgelegd. Daar nu de kracht steeds werkt volgens de normaal op de oppervlakte, en hare grootte steeds evenredig is met de vermeerdering dier oppervlakte, is hier de arbeid evenredig met de vermeerdering van het volume.

Noemt men nu a het mechanisch equivalent der warmte-eenheid, dat wil zeggen, is a de hoeveelheid arbeid, die ontstaat als eene warmte-eenheid wordt verbruikt tot uitzetting van een gas, dan is

$$A = 0.069 . t a$$

of $0,069 \, t \, a = d v,$

waaruit volgt

$$54 \dots\dots a = \frac{d v}{0.069 \, t}$$

meterkilogram voor de waarde van het genoemd mechanisch equivalent.

Nu heeft, volgens de wet van GAY-LUSSAC (§ 45),¹⁾ het quotient $\frac{d}{k(273 + t)}$ dezelfde waarde voor en na de uitzetting. Ver-

vangen wij in dat quotient het specifiek gewicht door $\frac{G}{V}$, en merken wij op, dat, daar wij steeds spraken over de uitzetting van een kilogram lucht, $G = 1$ is, dan wordt het quotient, als t de temperatuur vóór en $t + t'$ die na de verwarming is, in het eerste geval

$$\frac{d \cdot V}{273 + t} = 29.28$$

en in het tweede

$$\frac{d \cdot V + d v}{273 + t + t'} = 29.28.$$

Uit beide vergelijkingen te zamen volgt:

$$55 \dots\dots d \cdot v = 29.28 \, t'.$$

Substitueeren wij deze waarde van $d v$ in die van a , dan komt er

$$a = \frac{29.28}{0.069} = 424$$

meterkilogr. voor het mechanisch equivalent der warmte-eenheid.

48. Het aantal n warmte-eenheden, dat aangevoerd moet worden om een volumen dampkringslucht V te doen toenemen tot $V + v$, zonder dat daarbij de drukking verandert, kan bepaald worden uit de vergelijking

$$n = 0.2377 \times t'$$

108 § 48. Hoeveelheid warmte, noodig tot het voortbrengen

wanneer daarin t' de temperatuurs-verhooging voorstelt die het gas ondergaat. Nu is (vergel. 55)

$$t' = \frac{d v}{29.28}$$

dus

$$n = 0.2377 \cdot \frac{d v}{29.28}.$$

Het aantal n' warmte-eenheden, vereischt om de drukking te doen stijgen van d tot $d + d'$, zonder dat daarbij het volumen verandert, zal, als in dit geval t'' de temperatuurs-verhooging voorstelt,

$$n' = 0.1687 \times t''$$

zijn. Nu is vóór de verwarming (vergel. 55)

$$\frac{d V}{273 + t} = 29.28$$

en na de verwarming,

$$\frac{(d + d') V}{273 + t + t''} = 29.28,$$

zoodat

$$t'' = \frac{d' \cdot V}{29.28}$$

is.

Substitueert men deze waarde van t'' in die van n' , dan wordt

$$n' = 0.1687 \frac{V d'}{19.28}.$$

Veranderen beide drukking en volumen, dan zal gedurende elk ander tijdsdeeltje eene andere vermeerdering van de eerste overeenstemmen met eene andere vermeerdering van het laatste. Nemen wij nu aan, dat gedurende een zeer klein tijdsdeeltje van de aangewende warmte-eenheden $n + n'$ een gedeelte eene vermeerdering van het volumen v , en een ander gedeelte eene vermeerdering van de drukking d' teweegbrengt, dan is

$$n + n' = 0.2377 \frac{d v}{19.28} + 0.1687 \frac{d' V}{19.28}.$$

Is $n + n'$ gelijk nul, dan wordt

$$56 \dots \dots \frac{d'}{d} = -\frac{0.2377}{0.1687} \cdot \frac{v}{V} = -1.4 \frac{v}{V}.$$

Voert men dus in het geheel geen warmte aan, dan zal gedurende elk willekeurig tijdsdeeltje eene vermeerdering van het volumen overeenkomen met eene vermindering van de drukking, die grooter is dan de vermindering bij constante temperatuur. (§ 44).

Deze grootere vermindering in drukking kan alleen worden toegeschreven aan eene daling van de temperatuur, zoodat, wanneer van eene hoeveelheid gas het volume grooter wordt gemaakt, zonder dat men warmte aanvoert, de temperatuur zal dalen. Omgekeerd zal bij het samendrukken van een volumen gas de temperatuur stijgen, wanneer geen warmte wordt afgeleid. Wat alsdan wordt in vergel. 56 de waarde van v negatief, en dus de absolute waarde van $\frac{d'}{d}$ grooter dan, volgens de wet van MARIOTTE, bij constante temperatuur het geval zou zijn.

49. De drukking, die de dampkring bij den gemiddelden barometerstand aan de oppervlakte der zee door haar eigen gewicht uitoefent, bedraagt 10336 kil. per vierkante meter. Deze drukking neemt af als de hoogte boven genoemde oppervlakte toeneemt; toch is zij niet omgekeerd evenredig met die hoogte, daar het specifiek gewicht van de verschillende lagen zelf omgekeerd evenredig is met de drukking, die door de hooger gelegenen op haar wordt uitgeoefend.

Noemen wij h den afstand tusschen twee lagen dampkringslucht, d' de drukking per □ meter in de laagst gelegene, d die in de hoogst gelegene, en verdeelen wij die hoogte h in n gelijke deelen. Wanneer wij dan n onbepaald laten toenemen, zal het verschil Δd tusschen de drukking per □ meter in de hoogste en in de onmiddellijk daaronder gelegen laag, door het gewicht van een zuil lucht mogen worden voorgesteld, wier grondvlak

1 □ meter en wier hoogte $\frac{h}{n}$ is, Dit gewicht is, als k het specifiek gewicht voorstelt, $k \cdot \frac{h}{n}$ zoodat

$$d + \Delta d = d + k \frac{h}{n}$$

zijn zal.

Maar als d_0 de drukking aan de oppervlakte der zee en k_0 daar het gewicht van 1 kub. meter lucht bij 0° C. voorstelt ($k_0 = 1.293$), dan zal, volgens de wet van MARIOTTE,

$$k = \frac{d}{d_0} k_0$$

zijn.

Derhalve is

$$d + \Delta d = d + \frac{d}{d_0} k_0 \frac{h}{n}$$

of

$$d + \Delta d = d \left(1 + \frac{k_0}{d_0} \cdot \frac{h}{n} \right),$$

zoodat in het algemeen, om van de drukking d in een laag over te gaan op de drukking in de onmiddellijk daaronder gelegene, men met $\left(1 + \frac{k_0}{d_0} \cdot \frac{h}{n} \right)$ zal hebben te vermenigvuldigen. De uitdrukking

$$d' = d \left(1 + \frac{k_0}{d_0} \cdot \frac{h}{n} \right)^n$$

zal dus meer en meer eene ware vergelijking zijn, naarmate n toeneemt. En daar (D. I. § 55)

$$\left(1 + \frac{k_0}{d_0} \cdot \frac{h}{n} \right)^n = e^{\frac{k_0}{d_0} h}$$

is voor $n = \infty$, zal

$$d' = d e^{\frac{k_0}{d_0} h}$$

de ware voorstelling zijn van de drukking in een laag, die h

meters lager ligt dan die, waarin de drukking d is. Uit haar volgt:

$$\log. d' = \log. d + \frac{k_0}{d_0} h$$

of

$$h = \frac{d_0}{k_0} (\log. d' - \log. d) = \frac{d_0}{k_0} \log. \left(\frac{d'}{d} \right),$$

eene vergelijking waardoor men, als het verschil in barometerstand tusschen twee plaatsen gegeven is, hunnen vertikalen afstand kan bepalen.

50. Van de zoo aanzienlijke drukking van den dampkring op de lichamen rondom ons, bemerken wij doorgaans niets. Deze omstandigheid is daaraan toe te schrijven, dat de drukkingen, in horizontale richting uitgeoefend op een lichaam dat van lucht omgeven is, elkander om dezelfde redenen als die wij in § 35 ontwikkelden, opheffen. Nu hebben wel de vertikale drukkingen eene resultante, die de lichamen tracht te doen stijgen met een kracht, gelijk aan het gewicht van de verplaatste lucht, maar deze kracht is in het algemeen zoo klein in verhouding tot het gewicht van die lichamen zelve, dat men van hare werking niets gewaar wordt. Stijgkracht der luchtballons.

Alleen wanneer men van twee lichamen, die een zeer verschillende dichtheid hebben, de gewichten met elkander wil vergelijken, zal men op het verschil in opwaarts gerichte drukkingen, die beide ondervinden, hebben te letten. Het gewicht, dat het lichaam, waarvan het volume V grooter is dan het volume V' der gewichten, in de lucht schijnt te hebben, zal, wil de weging juist zijn, met het gewicht van een volume $V - V'$ dampkringslucht moeten vermeerderd worden.

51. Wat het uitstroomen van gassen door openingen en buizen betreft, daarvoor geldt in het algemeen, wat wij in het vorige hoofdstuk omtrent het uitstroomen van dampvormige vloeistoffen hebben gezegd.

Wij vonden daar dat de snelheid der uitstrooming (§ 37) door

$$s = \sqrt{2 g h}$$

wordt voorgesteld, wanneer ten minste gedurende eene sekonde de hoogte h van de vloeistof boven de opening niet merkbaar verandert, en er van buiten op de opening geen drukking wordt uitgeoefend. Is het laatste wel het geval, dan zal, als h' de hoogte voorstelt van het water buiten de opening, de snelheid

$$s = \sqrt{2g(h - h')}$$

zijn; en bij de beschouwing van het uitstroomen van gassen zal, indien men wil dat aan de eerstgenoemde voorwaarde voldaan zij, op de drukking van buiten naar binnen steeds gelet moeten worden. Noemt men d de drukking per vlakke-eenheid van binnen naar buiten, en d' die van buiten naar binnen, dan is $h = \frac{d}{k \times 1}$ en $h' = \frac{d'}{k \times 1}$. De snelheid der uitstroo-
ming is dus

$$s = \sqrt{2g \frac{d}{k} \left(1 - \frac{d'}{d}\right)}$$

of (§ 45)

$$s = \sqrt{2g \cdot 29,28 (273 + t) \left(1 - \frac{d'}{d}\right)}$$

als men aanneemt, dat de meerdere drukking van binnen wordt veroorzaakt, doordien de temperatuur daar t graden hooger is dan die der omringende lucht.



