



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>

BEGINSELEN

DER

HOOGERE ALGEBRA,

MET VRAAGSTUKKEN,

VOOR

HOOGERE BURGERSCHOLEN,

DOOR

J. VERSLUYS,

Leeraar aan de Rijks Hoogere Burgerschool te Groningen.



TE GRONINGEN, BIJ P. NOORDHOFF. 1872.

Gedrukt bij Gebrs. Hoitsema, te Groningen.

VOORBERICHT.

In het volgende heb ik van de hoogere algebra alleen die hoofdstukken behandeld, welke op de hoogere burgerscholen onderwezen worden, en die dus genoemd worden in het voorschrift betreffende de eind-examens. Wat voorkomt over de kansrekening is opgenomen als een praktische en nuttige toepassing van de leer der permutatiën en combinatiën.

Aan ieder hoofdstuk zijn juist zooveel vraagstukken toegevoegd, als naar mijne meening ter toepassing van het geleerde moeten gemaakt worden.

Hiermede beveel ik dit boekje aan in de belangstelling mijner ambtgenooten.

Groningen, Maart 1872.

J. VERSLUYS.

HOOFDSTUK I.

PERMUTATIËN EN COMBINATIËN.

PERMUTATIËN.

§ 1. Stellen wij ons voor, dat wij een zeker aantal b. v. m voorwerpen hebben. Eenige van die voorwerpen in een bepaalde volgorde naast elkander geplaatst vormen een *vereeniging*. Neemt men van m voorwerpen op alle mogelijke wijzen n voorwerpen, dan vormen al die vereenigingen de *permutatiën* n aan n van m voorwerpen. Twee permutatiën kunnen dus verschillend zijn door de voorwerpen, waarmede zij gevormd zijn, of ook door de volgorde, waarin die voorwerpen voorkomen. B. v. met de 3 letters a , b en c kan men onder anderen de volgende permutatiën 2 aan 2 vormen

$$a b, a c, b a,$$

waarvan de eerste en tweede verschillen door de letters, waaruit zij bestaan, de eerste en derde door de volgorde der letters.

In het volgende duiden wij de voorwerpen aan door de letters van het alphabet. Om een permutatie van die voorwerpen aan te wijzen, plaatsen wij de letters naast elkaar. In het volgende zullen wij het aantal der permutatiën bepalen, die men met een zeker aantal voorwerpen kan maken. Daarbij duiden wij het *aantal* der permutatiën n aan n van m voorwerpen aan door

$$P_m^n.$$

§ 2. Door de *permutatiën* 1 aan 1 van m voorwerpen verstaat men volgens het voorgaande al die voorwerpen één voor één genomen. Men heeft dus

$$P_m^1 = m.$$

Om de *permutatiën twee aan twee* van m voorwerpen te vormen, merken wij op, dat in elk dier permutatiën 1 der m voorwerpen aan de linkerhand staat. Heeft men een bepaald voorwerp aan de linkerhand geplaatst, dan krijgt men alle permutatiën 2 aan 2, met dat voorwerp aan de linkerhand, als men al de andere voorwerpen rechts van dat voorwerp plaatst. Er zijn dus $m - 1$ permutatiën 2 aan 2, die alle hetzelfde voorwerp aan de linkerhand hebben. En daar verder elk der m voorwerpen beurtelings aan de linkerhand kan staan, zoo heeft men $m (m - 1)$ permutatiën 2 aan 2 van m elementen.

$$P_m^2 = m (m - 1)$$

B. v. de 5 voorwerpen a, b, c, d, e geven de volgende permutatiën 2 aan 2

$$\begin{array}{l} ab, ac, ad, ae \\ ba, bc, bd, be \\ ca, cb, cd, ce \\ da, db, dc, de \\ ea, eb, ec, ed \end{array}$$

Om de *permutatiën 3 aan 3* van m voorwerpen te vormen, merken wij op, dat in zulk een permutatie de 2 voorwerpen aan de linkerhand een permutatie 2 aan 2 vormen. Heeft men een bepaalde permutatie 2 aan 2, dan krijgt men alle permutatiën 3 aan 3 met die permutatie 2 aan 2 aan de linkerhand, door achter de permutatie 2 aan 2 beurtelings elk der overige voorwerpen te plaatsen. Men heeft dus $m - 2$ permutatiën 3 aan 3, die alle dezelfde permutatie 2 aan 2 aan de linkerhand hebben. Daar verder elk der permutatiën 2 aan 2 aan de linkerhand kan staan, heeft men

$$P_m^3 = m (m - 1) (m - 2). \text{ Evenzoo is}$$

$$P_m^4 = m (m - 1) (m - 2) (m - 3). \text{ En in 't algemeen}$$

$$P_m^n = m (m - 1) (m - 2) \dots (m - n + 1).$$

VOORBEELD. *Hoereel verschillende getallen van 3 cijfers kan men vormen met de cijfers 2, 4, 5, 6, 7 en 8, als in elk getal hetzelfde cijfer niet 2maal mag voorkomen?*

Men heeft hier 6 voorwerpen (cijfers). Die voorwerpen moeten op alle mogelijke wijzen drie aan drie naast elkaar geplaatst worden. Wij moeten dus het aantal permutatiën 3 aan 3 van 6 voorwerpen bepalen; en dat aantal is $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

§ 3. Soms tijds moet men bij het vormen der permutatiën n aan n van m voorwerpen ook alle vereenigingen vormen, die men krijgen kan, door elk der voorwerpen 2 of meermalen in dezelfde groep te doen voorkomen. Men heeft dan *permutatiën met herhalingen* n aan n van m voorwerpen.

Om de *permutatiën met herhalingen* 2 aan 2 van m voorwerpen te bepalen, moet men achter elk der m voorwerpen niet alleen de overige voorwerpen, maar ook het voorwerp zelf plaatsen. Men heeft dus m permutatiën met herhalingen 2 aan 2, waarin hetzelfde voorwerp aan de linkerhand staat. Daar verder elk der m voorwerpen aan de linkerhand kan staan, zoo heeft men m^2 permutatiën met herhalingen 2 aan 2 van m voorwerpen.

Om de *permutatiën met herhalingen* 3 aan 3 van m voorwerpen te bepalen, moet men achter elk der permutatiën met herhalingen 2 aan 2 al de voorwerpen plaatsen. Het aantal der permutatiën met herhalingen 3 aan 3 van m voorwerpen is dus

$$m^3.$$

Zoo kan men voortgaan, en men vindt dus algemeen, dat het aantal permutatiën met herhalingen n aan n van m voorwerpen is

$$m^n,$$

waarin n ook gelijk aan m en grooter dan m kan zijn.

VOORBEELD. *Hoeveel verschillende getallen van 3 cijfers kan men vormen met de cijfers 2, 4, 5, 6, 7 en 8?*

Men heeft hier permutatiën met herhalingen 3 aan 3 van 6 voorwerpen. Het antwoord is dus $6^3 = 216$.

§ 4. Men kan volgens de redeneeringen van § 2 de permutatiën m aan m van m voorwerpen vormen; men vindt

$$P_m^m = m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1$$

In plaats van permutatiën m aan m van m voorwerpen zegt men gewoonlijk *onderlinge permutatiën* van m voorwerpen, daar in elk dier permutatiën al de voorwerpen voorkomen; maar telkens in andere volgorde.

Als er bij de onderlinge permutatiën onder de m voorwerpen gelijke voorkomen, dan zouden ook onder de $m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1$ permutatiën gelijke voorkomen. Men kan ook in dit geval het aantal der *verschillende onderlinge permutatiën* bepalen.

Veronderstellen wij n.l., dat er onder de m voorwerpen 3 gelijke zijn. Als die 3 voorwerpen verschillend waren, zou men hebben

$m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1$ onderlinge permutatiën.

Deze permutatiën kan men vereenigen in groepen, zóo dat de permutatiën van een zelfde groep alleen verschillen door de volgorde, waarin die 3 voorwerpen voorkomen. Daar men alle onderlinge permutatiën van m voorwerpen heeft, zullen in elke groep zooveel permutatiën voorkomen, als het aantal onderlinge permutatiën van 3 voorwerpen bedraagt. Als nu die 3 voorwerpen niet onderling verschillend, maar onderling gelijk zijn, dan zijn ook al de permutatiën van een zelfde groep gelijk. Men moet dus, om het aantal onderlinge permutatiën te krijgen van m voorwerpen, waaronder 3 gelijk zijn, het aantal onderlinge permutatiën van m verschillende voorwerpen deelen door het aantal onderlinge permutatiën van 3 verschillende voorwerpen. Het gevraagde aantal is dus

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = (m-1)(m-2) \dots 5 \cdot 4$$

Op dezelfde wijze vindt men voor elk ander getal n , dat het aantal onderlinge permutatiën van m voorwerpen, waaronder n gelijk zijn, gelijk is aan

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}$$

Heeft men onder de m voorwerpen eerst n onderling gelijke en onder de overige nog p onderling gelijke, dan blijkt dat men het aantal onderlinge permutatiën van m voorwerpen eerst moet deelen door het aantal onderlinge permutatiën van n voorwerpen en het komende quotient door het aantal onderlinge permutatiën van p voorwerpen.

Evenzoo voor 3 groepen van onderling gelijke voorwerpen.

VOORBEELD. Hoeveel verschillende getallen kan men maken met de 8 cijfers 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6?

Antwoord.
$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

COMBINATIËN.

§ 5. Door de *combinatiën* n aan n van m voorwerpen verstaat men alle mogelijke groepen van n voorwerpen, die men van die m kan nemen, en onderling verschillen door de voorwerpen, waaruit zij bestaan. Bij de combinatiën wordt dus niet gelet op de volgorde der voorwerpen. In het volgende duiden wij het aantal combinatiën n aan n van m voorwerpen aan door

$$C_m^n.$$

De *combinatiën* 1 aan 1 van m voorwerpen verkrijgt men, door achtereenvolgens elk dier voorwerpen te nemen. Het aantal is dus m , of

$$C_m^1 = m.$$

Om het aantal *combinatiën* 2 aan 2 van m voorwerpen te bepalen, merken wij op, dat onder al de permutatiën 2 aan 2 van m elementen ook de combinatiën voorkomen. Verder merken wij op, dat men de permutatiën 2 aan 2 kan vereenigen in groepen, die de onderlinge permutatiën van 2 voorwerpen voorstellen, en dus in groepen van $2 \cdot 1$ permutatiën. Daar bij de combinatiën niet op de volgorde der voorwerpen gelet wordt, leveren de 2 permutatiën van elke groep slechts één combinatie op. Voor het aantal combinatiën 2 aan 2 van m voorwerpen vindt men dus

$$C_m^2 = \frac{P_m^2}{P_2^2} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}.$$

Evenzoo vindt men voor de combinatiën 3 aan 3 en n aan n

$$C_m^3 = \frac{P_m^3}{P_3^3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{P_n^n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

§ 6. Als men bij het vormen der combinatiën ook hetzelfde voorwerp in dezelfde combinatie herhaalt, dan heeft men *combinatiën met herhalingen*.

Om de *combinatiën met herhalingen* 2 aan 2 van m voorwerpen te vormen, plaatst men naast elk voorwerp beurtelings al de

voorwerpen, het eerste daaronder begrepen, en datzelfde voorwerp nog eens. Met behulp van dat éene voorwerp zijn dan $m + 1$ vereenigingen gevormd, en daar er m voorwerpen zijn, krijgt men op die wijze $m(m + 1)$ vereenigingen. Daaronder komt een vereeniging van 2 verschillende voorwerpen a en b b. v. 2maal voor: eens daar achter a geplaatst is b , en eens daar achter b geplaatst is a . Ook komt een vereeniging als $a a$ tweemaal voor, daar men achter a geplaatst heeft: vooreerst alle voorwerpen, waaronder a en bovendien nog eens a . Men kan dus de $m(m + 1)$ vereenigingen verdeelen in groepen van 2, die slechts één combinatie opleveren. Het aantal combinatiën met herhalingen 2 aan 2 van m voorwerpen is dus

$$\frac{m(m + 1)}{1 \cdot 2}$$

Om de *combinatiën met herhalingen 3 aan 3* van m voorwerpen te vormen, plaatsen wij achter elk der combinatiën met herhalingen 2 aan 2 beurtelings al de voorwerpen en bovendien de 2 voorwerpen, waaruit zulk een combinatie bestaat. Elke combinatie 2 aan 2 levert daardoor $m + 2$ vereenigingen op, en in

het geheel krijgt men dus $\frac{m(m + 1)}{1 \cdot 2} \times (m + 2)$ vereenigingen.

Onder die vereenigingen, komt elke vereeniging van 3 verschillende voorwerpen, b. v. a , b en c , 3 maal voor: eens daar achter $a b$ geplaatst is c , eens daar achter $a c$ geplaatst is b , eens daar achter $b c$ geplaatst is a . Een vereeniging, die uit 2 gelijke voorwerpen a en een ander b bestaat, komt ook driemaal voor: eens daar achter $a a$ geplaatst is b ; eens daar achter $a b$ geplaatst zijn alle voorwerpen, waaronder a , en eens daar achter $a b$ de voorwerpen geplaatst zijn, waaruit $a b$ bestaat, dat is dus ook weer a . Ten slotte zal ook een vereeniging van 3 gelijke voorwerpen a driemaal voorkomen: eens daar achter $a a$ geplaatst, zijn alle voorwerpen, waaronder a ; eens daar achter $a a$ geplaatst, is het eerste der voorwerpen, waaruit $a a$ bestaat; eens daar achter $a a$ geplaatst, is het tweede der voorwerpen, waaruit $a a$ bestaat. Men kan dus de

$$\frac{m(m + 1)}{1 \cdot 2} \times (m + 2)$$

verdeelen in groepen van 3, die telkens slechts één combinatie

opleveren. Men vindt dus voor het aantal combinatiën met herhalingen 3 aan 3 van m voorwerpen

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Zoo kan men voortgaan, en men vindt dus voor het aantal combinatiën met herhalingen n aan n van m voorwerpen

$$\frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

§ 7. Als men bij elk der combinatiën n aan n van m voorwerpen telkens de overige $m-n$ voorwerpen neemt, dan vormen deze telkens een combinatie van $m-n$ der m voorwerpen. Daar al de combinatiën n aan n van m voorwerpen verschillen door de voorwerpen, waaruit zij bestaan, zoo zullen ook de combinatiën $m-n$ aan $m-n$, die door de overgebleven voorwerpen gevormd worden, allé verschillend zijn. Omgekeerd kunnen er niet meer combinatiën $m-n$ aan $m-n$ zijn dan die, welke telkens door de overgebleven voorwerpen gevormd worden; want als er 1 was verschillend van al de genoemde, zouden de overige n voorwerpen een combinatie n aan n van m voorwerpen opleveren, die niet zou voorkomen bij de bovenbedoelde; maar dit strijdt tegen de onderstelling, dat men alle combinatiën n aan n van m voorwerpen genomen heeft.

Uit het voorgaande volgt, dat het aantal combinatiën n aan n van m voorwerpen gelijk is aan het aantal combinatiën $m-n$ aan $m-n$ van m voorwerpen.

Volgens deze eigenschap is b. v. het aantal combinatiën 7 aan 7 van 9 voorwerpen gelijk aan het aantal combinatiën 2 aan 2 van 9 voorwerpen, dat is gelijk aan $\frac{9 \times 8}{1 \cdot 2} = 36$.

§ 8. GESCHIEDENIS. Het eerst is over permutatiën en combinatiën geschreven in de zestiende eeuw door Cardanus en anderen; maar dat was van weinig belang. De eerste grootere verhandeling over perm. en comb. is van Pascal (omstreeks 1650). In een verhandeling van Jacob Bernoulli, die na zijn dood, in 1713, verscheen onder den titel »Ars conjectandi», komt nagenoeg alles voor, wat men tot nu toe van permutatiën en combinatiën weet.

§ 9. VRAAGSTUKKEN. 1. Bepaal het aantal permutatiën 2 aan 2 van 11 voorwerpen.

2. Op hoeveel verschillende wijzen kan men 8 personen op een rij plaatsen.

3. Bepaal het aantal combinatiën 3 aan 3 van 13 voorwerpen.

4. Bepaal het aantal combinatiën 17 aan 17 van 20 voorwerpen.

5. Bepaal het aantal permutatiën met herhalingen 4 aan 4 van 7 voorwerpen.

6. Hoeveel snijpunten kunnen 9 rechte lijnen opleveren?

7. Hoeveel snijpunten kunnen 10 platte vlakken opleveren?

8. Hoeveel getallen kan men maken, die uit de cijfers 2, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9 bestaan?

9. Bepaal de som van alle getallen, die men kan maken met de cijfers 1, 3, 5, 6, 7, 8.

10. Evenzoo van de cijfers 2, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9.

11. Op hoeveel verschillende wijzen kan men de letters van het woord *Groningen* plaatsen?

12. Hoeveel verschillende worpen kan men met 2 dobbelsteenen doen?

13. Tien personen, die elken middag aan dezelfde tafel eten, willen elken keer van plaats veranderen. Hoeveel jaren zullen er verlopen eer zij weer op dezelfde wijze naast elkaar moeten zitten, als zij reeds vroeger gezeten hebben?

14. Hoeveel snijpunten worden er gevormd door de snijding van 21 lijnen, die in één plat vlak liggen, en waarvan 6 onderling evenwijdig zijn, terwijl er 8 door één punt gaan?

15. Op hoeveel verschillende wijzen kunnen 32 kaarten onder vier personen verdeeld worden, zóo dat elk er 8 krijgt?

16. Op hoeveel wijzen kan men een produkt van 16 factoren verdeelen in produkten ieder van 2 factoren?

17. Hoeveel snijpunten worden er gevormd door de snijding van 25 platte vlakken, waarvan 7 evenwijdig zijn en 10 andere door één punt gaan?

18. Hoeveel tienhoeken zijn er die tien gegeven punten tot hoekpunten hebben, als men ook tienhoeken medetelt waarvan de omtrek zich zelve snijdt.

19. Hoeveel verschillende worpen kan men met 3 dobbelsteenen doen?

20. Hoeveel worpen kan men met 3 dobbelsteenen doen, als

men als verschillende worpen beschouwt, die welke met dezelfde getallen maar van verschillende steenen gevormd zijn?

21. Hoeveel cirkels kunnen aan 3 gegeven cirkels raken?

22. Hoeveel bollen kunnen aan 4 gegeven bollen raken?

23. Hoeveel gevallen zijn er te onderscheiden bij het beschrijven van een cirkel, die aan 3 gegeven cirkels raakt, als men ten aanzien van deze 3 als bijzondere gevallen van een cirkel beschouwt: een rechte lijn en een punt.

24. Evenzoo ten aanzien van een bol rakende aan 4 gegeven bollen.

25. Op hoeveel wijzen kan men het gedurig produkt van m getallen bepalen?

26. Hoeveel evenredigheden kan men opschrijven, die tot termen hebben: de zijden van 2 gelijkvormige veelhoeken?

BINOMIAAL-FORMULE.

§ 10. Nemen wij eenige tweetermige vormen $x + a_1$, $x + a_2$, $x + a_3$, $x + a_4$, enz., die alle tot eersten term hebben x , en wier tweede termen wij voorloopig verschillend nemen.

Nemen wij het gedurig produkt van eenige dier tweetermige vormen, dan krijgen wij achtereenvolgens

$$\begin{aligned}(x + a_1)(x + a_2) &= x^2 + a_1 x + a_2 x + a_1 a_2 \\ &= x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1 a_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \\ &= x^3 + a_1 x^2 + a_2 x^2 + a_3 x^2 + a_1 a_2 x + a_1 a_3 x + a_2 a_3 x + a_1 a_2 a_3 \\ &= x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x + a_1 a_2 a_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^3 + a_3 x^3 + a_4 x^3 + \dots \\ &\dots + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^2 + a_1 a_4 x^2 + a_2 a_3 x^2 + a_2 a_4 x^2 + a_3 a_4 x^2 + \dots \\ &\dots + a_1 a_2 a_3 x + a_1 a_2 a_4 x + a_1 a_3 a_4 x + a_2 a_3 a_4 x + a_1 a_2 a_3 a_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \dots \\ &\dots + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)x^2 + (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots \\ &\dots + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4)x + a_1 a_2 a_3 a_4\end{aligned}$$

enz.

Zulk een gedurig produkt van tweetermige factoren is de som van alle mogelijke gedurige produkten, die men kan verkrijgen, door van elken tweetermigen factor of den eersten term of den tweeden te nemen.

Beschouwen wij verder de laatste der vorige formules, die het gedurig produkt van 4 tweetermige factoren aangeeft. Elke term van dat produkt bevat 4 factoren. Onder die termen komt één voor, dien men verkrijgt, door van elken tweetermigen factor den term x te nemen. Die term is x^4 . In alle andere termen komt een a voor, zoodat er slechts een term in de uitkomst is, waarin 4 factoren x voorkomen en die term is x^4 .

Om die termen der uitkomst te verkrijgen, waarin 3 factoren x voorkomen en niet meer, moeten wij telkens van 3 tweetermige vormen den eersten term x als factor nemen en van den overgebleven tweetermigen vorm den term a . Er komen dus in de uitkomst zooveel termen met x^3 voor als het aantal malen bedraagt dat men van de 4 a 's één kan nemen; dat is dus

4 termen met x^3 .

Om die termen der uitkomst te verkrijgen, waarin 2 factoren x voorkomen, en niet meer, moeten wij telkens van 2 tweetermige vormen den term x nemen en van de beide overige tweetermige vormen den term a . Er komen dus in de uitkomst zooveel termen met x^2 voor, als het aantal malen bedraagt, dat men van de 4 a 's twee kan nemen. Dit aantal is het aantal combinatiën twee aan twee van vier voorwerpen of $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$; men heeft dus

$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ termen met x^2 .

Om die termen der uitkomst te krijgen, waarin 1 factor x voorkomt, en niet meer, moet men telkens van 1 tweetermigen vorm den term x nemen, en van de 3 overigen vormen den term a . Men heeft dus zooveel termen met x , als het aantal malen bedraagt, dat men van de 4 a 's er drie kan nemen. Dit aantal is het aantal combinatiën drie aan drie van vier voorwerpen of $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Men heeft dus

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ termen met x .

Om termen zonder x te krijgen, moet men van elken twee-

termigen vorm den term a nemen. Er is dus slechts één term zonder x in de uitkomst en die term is

$$a_1 a_2 a_3 a_4.$$

§ 11. Veronderstellen wij nu, dat de tweede termen van al de tweetermige vormen a zijn; dus

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a.$$

De term der uitkomst x^4 blijft dan onveranderd. Alle termen met x^3 worden $a x^3$ en het aantal van die termen is 4. Alle termen met x^2 worden $a^2 x^2$, en het aantal van die termen is $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$. Alle termen met x worden $a^3 x$ en het aantal van die

termen is $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. De term zonder x wordt a^4 . Men heeft dus gerangschikt

$$(x + a)^4 = x^4 + \frac{4}{1} a x^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x + a^4,$$

waarbij de eerste en de laatste term 1 tot coëfficiënt hebben. De coëfficiënt van den tweeden term is gelijk aan het aantal combinatiën 1 aan 1 van 4 voorwerpen; de coëfficiënt van den derden term is gelijk aan het aantal combinatiën 2 aan 2 van 4 voorwerpen; de coëfficiënt van den vierden term is gelijk aan het aantal combinatiën 3 aan 3 van 4 voorwerpen.

§ 12. Op dezelfde wijze vindt men voor het produkt van een willekeurig aantal, bij voorbeeld 9, tweetermige vormen van de gedaante $x + a$: dat daarbij 1 term voorkomt met x^9 ; dat het aantal termen met x^8 en één a gelijk is aan het aantal combinatiën 1 aan 1 van 9 voorwerpen; dat het aantal termen met x^7 en twee a 's gelijk is aan het aantal combinatiën 2 aan 2 van 9 voorwerpen; enz. Men heeft dan, als men alle a 's gelijk neemt,

$$\begin{aligned} (x + a)^9 &= x^9 + \frac{9}{1} a x^8 + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} a^2 x^7 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^6 + \dots \\ &+ \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^5 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 x^4 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6 x^3 + \dots \\ &+ \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^7 x^2 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} a^8 x + a^9. \end{aligned}$$

Daar dezelfde redeneering kan toegepast worden op een willekeurig getal, zoo heeft men, als n een geheel getal is,

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \text{enz. tot} \\ &\quad n + 1 \text{ termen.}\end{aligned}$$

Aan deze formule geeft men den naam van de *binomiaalformule*. Men kan dus zeggen, dat de binomiaalformule een willekeurige macht aangeeft van een binomium of tweetermigen vorm.

§ 13. Al de voorgaande redeneeringen gaan door, zoowel voor negatieve als voor positieve waarden van x en a ; zoowel voor imaginaire als voor reële waarden van x en a . Neemt men $x - a$ in plaats van $x + a$, dan volgt uit den regel voor de vermenigvuldiging van negatieve en positieve getallen, dat in de ontwikkeling van $(x - a)^n$ alle termen, waarin een oneven aantal factoren a zijn, het teeken — krijgen; en dat alle termen, waarin een even aantal factoren a zijn, het teeken + krijgen. Men heeft dus

$$\begin{aligned}(x-a)^n &= x^n - \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} - \dots \\ &\dots - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \text{enz.}\end{aligned}$$

§ 14. Daar het aantal combinatiën 8 aan 8 van 9 voorwerpen gelijk is aan het aantal combinatiën 1 aan 1 van 9 voorwerpen, zoo is in de ontwikkeling van § 12 de coëfficiënt van $a^8 x$ gelijk aan den coëfficiënt van $a x^8$. Evenzoo is de coëfficiënt van $a^7 x^2$ gelijk aan den coëfficiënt van $a^2 x^7$; en in het algemeen heeft men dus: als de ontwikkeling van $(x + a)^9$ gerangschikt is naar x , hebben elke 2 termen, die even ver van de uiterste afstaan, gelijke coëfficiënten.

In plaats van de ontwikkeling van § 12 heeft men dus eenvoudiger:

$$\begin{aligned}
 (x+a)^9 &= x^9 + \frac{9}{1} a x^8 + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} a^2 x^7 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^6 + \dots \\
 &\dots + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^5 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^5 x^4 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^6 x^3 + \dots \\
 &\dots + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} a^7 x^2 + \frac{9}{1} a^8 x + a^9.
 \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor alle andere geheele positieve exponenten.

§ 15. In de ontwikkeling van $(x+a)^n$ noemt men den coëfficiënt van den tweeden term, dat is $\frac{n}{1}$, den *eersten binomiaalcoëfficiënt*. Evenzoo noemt men den coëfficiënt van den derden term, dat is $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, den *tweeden binomiaalcoëfficiënt*. Zoo is ook $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ de *derde binomiaalcoëfficiënt*; enz.

§ 16. Vormen wij van $x+a$ door vermenigvuldiging achtereenvolgens de tweede macht, derde macht, vierde macht, enz.:

$$\begin{array}{rcl}
 & x+a & \\
 & \underline{x+a} & \\
 & ax+a^2 & \\
 \text{tweede macht} & \underline{x^2+2ax+a^2} & \\
 & x+a & \\
 & \underline{x^3+2ax^2+a^2x} & \\
 & ax^2+2a^2x+a^3 & \\
 \text{derde macht} & \underline{x^3+3ax^2+3a^2x+a^3} & \\
 & x+a & \\
 & \underline{x^4+3ax^3+3a^2x^2+a^3x} & \\
 & ax^3+3a^2x^2+3a^3x+a^4 & \\
 \text{vierde macht} & \underline{x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4} & \\
 & \text{enz.} \dots &
 \end{array}$$

Bij al die vermenigvuldigingen valt op te merken, dat telkens het tweede gedeeltelijke produkt één term naar de rechterhand uitspringt. Daaruit volgt, dat men de coëfficiënten van de ont-

wikkeling van $(x + a)^2$ krijgt, door de coëfficiënten van $x + a$, dat zijn 1 en 1, aldus onder elkaar te schrijven

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

en samen te tellen

Evenzoo krijgt men de coëfficiënten van $(x + a)^3$ door op dezelfde wijze de coëfficiënten van $(x + a)^2$ onder elkaar te schrijven, aldus

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array} \quad \text{coëff. 3^e macht.}$$

Evenzoo heeft men verder

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \quad \text{coëff. 4^e macht.}$$

OPMERKING. Men noemt de binomiaalformule dikwijls het *binomium van Newton*. Wel schijnt die formule lang vóór Newton bekend geweest te zijn, maar Newton heeft die formule uitgebreid tot gebroken en negatieve exponenten. De ontwikkeling wordt in zulk een geval een oneindig voortlopende reeks; het bewijs is voor dat geval zeer ingewikkeld en eischt een eenigszins uitgebreide kennis van de oneindig voortlopende reeksen.

§ 17. VRAAGSTUKKEN. 1. Schrijf de 5 eerste termen op van de ontwikkeling van $(y + p)^5$.

2. Wat is de vierde term van $(d - k)^{12}$.

3. » » » zesde » » $(2x + 3z)^{11}$.

4. Schrijf de 4 eerste termen op van $(c - k)^m$.

5. Evenzoo van $(-c + k)^7$.

6. » » $(-p - 2q)^8$.

7. Vorm op dezelfde wijze als in de vorige § de coëfficiënten van alle machten van een tweetermigen vorm tot en met de zevende macht.

8. Bepaal de som van alle coëfficiënten der ontwikkeling van $(x + a)^{13}$ en van $(x - a)^{14}$.

9. Bepaal den laatsten term van $(x - d)^9$.

10. » » » » » $(x - a)^{20}$.

11. Ontwikkel volgens de binomiaalformule $(x - 3)^5$, $(2x + 1)^6$, $(p + q)^7$, $(r - s)^8$, $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^7$, $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$.

12. Bepaal de som der coëfficiënten van $(x + y)^p$ en van $(x - y)^p$.
 13. Bepaal den middelsten term van $(b - c)^{10}$.
 14. » » zevendén » » $(p - \sqrt{-q})^{12}$.
 15. » » tienden » » $(-2 + \sqrt{-3})^{12}$.
 16. Wat is de grootste binomiaalcoëfficiënt van $(x + a)^8$ en van $(x + a)^9$?
 17. Bepaal de som van de aantallen combinatiën 1 aan 1, 2 aan 2, 3 aan 3 enz. tot 16 aan 16 van 16 voorwerpen.

WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING OF KANSREKENING.

§ 18. Door de *wiskundige waarschijnlijkheid* van een gebeurtenis verstaat men de verhouding van het aantal der gevallen, waarin die gebeurtenis zal plaats hebben, tot het aantal van alle mogelijke gevallen.

De wiskundige waarschijnlijkheid van een gebeurtenis is dus een breuk, die nooit grooter dan 1 is.

Als de wiskundige waarschijnlijkheid door W wordt voorgesteld, zegt men voor $W = \frac{1}{2}$, dat de gebeurtenis *onzeker* is;

voor $W < \frac{1}{2}$, » » » *onwaarschijnlijk* is;

voor $W > \frac{1}{2}$, » » » *waarschijnlijk* is.

Voor $W = 1$ zal de gebeurtenis in alle mogelijke gevallen plaats hebben (of m. a. w. zijn alle kansen gunstig). Voor $W = 1$ is dus de gebeurtenis *zeker*.

§ 19. VOORBEELD. *Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat men uit een vaas, waarin 4 witte en 7 zwarte kogels zijn, bij één trek een witten kogel zal trekken?*

In het geheel zijn $4 + 7 = 11$ trekken mogelijk, terwijl het aantal gevallen, dat men een witten kogel kan trekken, gelijk is aan het aantal der witte kogels. Men heeft dus als antwoord $\frac{4}{11}$.

VOORBEELD. *Hoe groot is de waarschijnlijkheid om met twee dobbelsteenén 8 te gooien?* 2*

Het aantal van alle mogelijke worpen met 2 dobbelsteen is $6^2 = 36$. Verder krijgt men 8, als men met den eenen en den anderen steen respectievelijk gooit 6 en 2, 5 en 3, 4 en 4, 3 en 5, 2 en 6. Het aantal gunstige gevallen is dus 5; zoodat men als antwoord heeft $\frac{5}{36}$.

§ 20. VRAAGSTUK. *Men heeft 2 verschillende vazen. In de eerste zijn 2 witte kogels en 5 zwarte, in de tweede zijn 8 witte en 11 zwarte. Als men uit elke vaas een kogel neemt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat de beide kogels wit zijn?*

In de eerste vaas zijn 7 kogels, in de tweede 19. Daar elk der kogels uit de eerste vaas kan getrokken worden met elk der kogels uit de tweede vaas, zoo is het aantal van alle kansen 7×19 . Daar elk der 2 witte kogels uit de eerste vaas kan getrokken worden met elk der 8 witte kogels uit de tweede vaas, zoo is het aantal gunstige kansen 2×8 . Men heeft dus als antwoord

$$\frac{2 \times 8}{7 \times 19} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{19}$$

$\frac{2}{7}$ is de waarschijnlijkheid, dat men in 1 trek uit de eerste vaas een witten kogel zal trekken; en $\frac{8}{19}$ is de waarschijnlijkheid, dat men uit de tweede vaas in 1 trek een witten kogel zal trekken. Wij kunnen dus ook zeggen: de waarschijnlijkheid, dat men 2 witte kogels zal trekken, als men uit elk der vazen een kogel trekt, is gelijk aan het produkt der waarschijnlijkheden, dat men in elk der 2 gevallen een witten kogel zal trekken.

§ 21. Dezelfde redeneering als in de voorgaande § kan toegepast worden, zoo dikwijls een gebeurtenis bestaat in het gelijktijdig of achtereenvolgens plaats hebben van 2 of meer andere gebeurtenissen. Wij hebben dus geheel algemeen: *als een gebeurtenis bestaat in het gelijktijdig of achtereenvolgens plaats hebben van 2 of meer andere gebeurtenissen, is de waarschijnlijkheid van de eerste gebeurtenis het produkt der waarschijnlijkheden van de andere gebeurtenissen.*

§ 22. VOORBEELD. *Als men uit 60 verschillende nummers 4 trekt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat men 4 bepaalde nummers in een vooruit vastgestelde volgorde zal trekken?*

De kans om het eerste nummer te trekken is $\frac{1}{60}$.

De kans om uit de overgebleven 59 nummers het tweede nummer te trekken is $\frac{1}{59}$. Evenzoo van het derde $\frac{1}{58}$, en van het vierde $\frac{1}{57}$. Men heeft dus als antwoord

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{59} \cdot \frac{1}{58} \cdot \frac{1}{57}$$

VOORBEELD. *Als men uit 60 verschillende nummers achtereenvolgens 4 trekt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat het vierde nummer een vooruit bepaald nummer zij?*

Men moet bij den eersten trek het bepaalde nummer niet trekken; en de waarschijnlijkheid daarvoor is $\frac{59}{60}$. Men moet bij den tweeden trek uit de overgebleven 59 nummers het bepaalde nummer niet trekken, en de waarschijnlijkheid daarvoor is $\frac{58}{59}$. Men moet bij den derden trek het bepaalde nummer niet trekken, en de kans daarvoor is $\frac{57}{58}$. Bij den vierden trek moet men uit de overgebleven 57 nummers het bepaalde nummer trekken; de kans daarvoor is $\frac{1}{57}$. Men heeft dus als antwoord

$$\frac{59}{60} \cdot \frac{58}{59} \cdot \frac{57}{58} \cdot \frac{1}{57} = \frac{1}{60}.$$

§ 23. *Over de waarschijnlijkheid, dat van verschillende gebeurtenissen minstens één zal plaats hebben.*

Daar het zeker is, dat een gebeurtenis of wel of niet zal plaats hebben, zoo is de som van de waarschijnlijkheid, dat een gebeurtenis niet zal plaats hebben en de waarschijnlijkheid, dat zij wel zal plaats hebben, *de eenheid*.

Laat nu W_1 de waarschijnlijkheid zijn, dat een zekere gebeurtenis zal plaats hebben; en W_2 de waarschijnlijkheid, dat een andere gebeurtenis zal plaats hebben. Zij verder gevraagd de waarschijnlijkheid, dat minstens een der twee gebeurtenissen zal plaats hebben.

De waarschijnlijkheid, dat de eerste gebeurtenis niet zal plaats hebben, is $1 - W_1$. De waarschijnlijkheid, dat de tweede gebeurtenis niet zal plaats hebben, is $1 - W_2$. De waarschijnlijkheid, dat geen der twee gebeurtenissen zal plaats hebben, is dus $(1 - W_1)(1 - W_2)$. Verder is één van tweeën waar: de gebeurtenissen zullen geen van beiden plaats hebben, of minstens een der gebeurtenissen zal plaats hebben. De waarschijnlijkheid, dat minstens een der twee gebeurtenissen zal plaats hebben is dus

$$1 - (1 - W_1)(1 - W_2).$$

Wij hebben volgens al het voorgaande: *de waarschijnlijkheid, dat van 2 gebeurtenissen minstens één zal plaats hebben, wordt verkregen, door van 1 af te trekken het produkt der waarschijnlijkheden, dat elk der 2 gebeurtenissen niet zal plaats hebben.*

Eenzoo voor 3 of meer gebeurtenissen.

VOORBEELD. *Als men uit een spel van 52 kaarten tweemaal achtereen een kaart trekt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat er bij die twee kaarten een aas of een heer zij?*

De waarschijnlijkheid een aas te trekken is $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. De waarschijnlijkheid niet een aas te trekken is dus $\frac{12}{13}$. De waarschijnlijkheid een heer te trekken is $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; de waarschijnlijkheid niet een heer te trekken is dus $\frac{12}{13}$. Men heeft nu als antwoord

$$1 - \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{25}{169}.$$

VOORBEELD. *Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat men in 4 worpen met een dobbelsteen minstens eenmaal 6 zal gooien?*

De waarschijnlijkheid in 1 worp 6 te gooien is $\frac{1}{6}$, zoodat de waarschijnlijkheid, dat men in 1 worp niet 6 zal gooien $\frac{5}{6}$ is. De waarschijnlijkheid, dat men in 4 worpen niet éénmaal 6 zal gooien is dus $(\frac{5}{6})^4$; zoodat de waarschijnlijkheid, dat men in 4 worpen minstens éénmaal 6 zal gooien is $1 - (\frac{5}{6})^4$.

§ 24. VERSCHILLENDE VRAAGSTUKKEN. 1. *Twee spelers willen ophouden op het oogenblik, dat de eerste nog éénmaal moet winnen, om de inleggen te krijgen en de tweede nog drie maal. Als zij telkens dezelfde kans hebben te winnen, hoe moeten zij dan de inleggen verdeelen?*

Als zij nog 3 maal spelen, is de partij in ieder geval geëindigd. Veronderstellen wij, dat zij afspreken werkelijk nog 3 maal te spelen. De eerste speler kan:

den eersten keer winnen en de 2 andere keeren verliezen;

» tweeden » » » » » » » »

» derden » » » » » » » »

» eersten » verliezen » » » » » » winnen;

» tweeden » » » » » » » »

» derden » » » » » » » »

de drie keeren winnen;

de drie keeren verliezen.

Deze 8 gevallen zijn de eenige, die zich kunnen voordoen. In de 7 eerste gevallen wint de eerste speler en in het laatste geval wint de tweede speler. De kansen om te winnen staan dus tot elkaar als 7 tot 1, en in die verhouding moeten zij ook de som der inleggen verdeelen.

2. *Een vaas bevat 7 kogels. Bepaal de waarschijnlijkheid dat men uit de vaas een oneven, en ook de waarschijnlijkheid dat men uit die vaas een even aantal kogels zal trekken.*

Het aantal gevallen, O, dat men uit de vaas een oneven aantal kogels kan trekken, is gelijk aan de som der aantallen combinatiën 1 aan 1, 3 aan 3, 5 aan 5 en 7 aan 7 van 7 voorwerpen. Dus

$$O = \frac{7}{1} + \frac{7(7-1)(7-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + 1.$$

$$\text{Evenzoo } E = \frac{7(7-1)}{1 \cdot 2} + \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Maar men heeft

$$1 + O + E = (1 + 1)^7 = 2^7$$

$$\text{en } \frac{1 - O + E}{2} = \frac{(1 - 1)^7}{2} = 0, \text{ waaruit volgt } 2O = 2^7 \text{ of } O = 2^6 \text{ en } E = 2^6 - 1.$$

Het aantal van alle kansen is $O + E = 2^7 - 1$, zoodat men als antwoorden vindt

$$2^6: (2^7 - 1) \text{ en } (2^6 - 1): (2^7 - 1).$$

§ 25. GESCHIEDENIS. Vraagstukken over waarschijnlijkheidsrekening zijn het eerst opgelost in het midden der 17de eeuw door Fermat en Pascal (1654). Zie Oeuvres complètes de B. Pascal, tome troisième, Paris L. Hachette et C^{ie}, 1865. Dat deel bevat al de wis- en natuurkundige werken van Pascal in een boekdeel van 500 pag^a, waarvan de prijs 1 franc is. Verder is de kansrekening behandeld door Huygens, 1657. Meer nauwkeurig is de kansrekening behandeld door Jac. Bernoulli (ars

conjectandi, 1713) en door Moivre (doctrine of chances 1717, vollediger in 1738). Zie verder Laplace, *théorie analytique des probabilités*; 3^e Ed. 1820.

§ 26. VRAAGSTUKKEN. 1. Men heeft 3 verschillende vazen. De eerste bevat 5 witte kogels en 2 zwarte; de tweede bevat 3 witte kogels en 7 zwarte; de derde bevat 4 witte kogels en 6 zwarte. Als men uit elke vaas 1 kogel trekt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat die 3 kogels wit zullen zijn?

2. Een vaas bevat 4 witte kogels en 6 zwarte. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat 3 kogels, die men uit de vaas trekt, zwart zullen zijn?

3. Een vaas bevat 3 witte en 6 zwarte kogels. Men neemt 1 kogel uit de vaas en legt haar weder in de vaas. Datzelfde doet men 4 maal. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat de 4 kogels zwart zullen zijn?

4. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat men met 2 dobbelsteenen 7 zal gooien?

5. Bereken de waarschijnlijkheid, dat men met 3 dobbelsteenen meer dan 12 zal gooien.

6. Bereken de waarschijnlijkheid, dat men met 3 dobbelsteenen minder dan 9 zal gooien.

7. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat men uit een spel van 32 kaarten, 4 kaarten trekkende, de 4 azen zal trekken?

8. Twee spelers willen ophouden op het oogenblik, dat de eerste nog 1 maal en de tweede nog 2 maal zou moeten winnen om het spel te winnen. In welke verhouding moeten zij de som der inleggen verdeelen?

9. Bereken de waarschijnlijkheid, dat men uit een vaas met 10 voorwerpen een even aantal zal trekken.

10. Een vaas bevat alle getallen van 1 tot 100. Men neemt er 5 uit; hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat onder die 5 de getallen 11, 12 en 50 voorkomen?

11. Als men uit diezelfde vaas achtereenvolgens 3 getallen neemt, hoe groot is dan de kans, dat het derde getal 1 zal zijn?

12. Als men uit een spel van 32 kaarten 5 malen achtereem

een kaart trekt, hoe groot is dan de waarschijnlijkheid, dat men minstens 1 maal een aas zal trekken?

13. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat men uit een spel van 52 kaarten respectievelijk zal trekken 3, 4 en aas.

14. Hoe groot is de waarschijnlijkheid met een dobbelsteen 2 malen achtereen 5 te gooien?

15. Hoe groot is de waarschijnlijkheid, dat van 2 worpen met 2 dobbelsteen minstens een worp 7 of 4 zal zijn?



HOOFDSTUK II.

METHODE DER ONBEPAALED COEFFICIENTEN.

§ 26. Als gevraagd wordt, den algebraïschen vorm $x^2 + 8x + 15$ te ontbinden in 2 factoren van den eersten graad, dan kan men dadelijk voor die factoren aannemen

$$x + a \text{ en } x + b$$

en dan is het niet x maar het zijn de coëfficiënten a en b , die bepaald moeten worden. Als men, om aan een vraag te voldoen, 1 of meer algebraïsche vormen aanneemt, en vervolgens de coëfficiënten van die vormen bepaalt, past men *de methode der onbepaalde coëfficiënten* toe.

In het voorgaande moet

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 8x + 15$$

een identieke vergelijking zijn. Men kan dan, om a en b te bepalen, voor x willekeurige waarden aannemen; dan levert elke waarde voor x een vergelijking op, waaraan a en b moeten voldoen.

Een tweede wijze, om a en b te bepalen, bestaat hierin, dat men zoowel het eerste als het tweede lid rangschikt volgens x en gebruik maakt van de volgende eigenschap.

Als twee geheele algebraïsche vormen, b . v.

$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ en $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ gelijk zijn voor alle waarden van x , dan zijn de coëfficiënten van de gelijknamige machten van x twee aan twee gelijk.

Men heeft voor alle waarden van x ,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Dit is dus ook waar voor $x = 0$, waaruit blijkt

$$E = e.$$

Uit dit laatste en het voorgaande volgt

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)x$$

Daar deze 2 produkten gelijk zijn voor alle waarden van x en de tweede factoren steeds gelijk zijn, zoo moet men ook voor alle waarden van x hebben

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Door hierin voor x nul te nemen, vindt men

$$D = d, \text{ en dus}$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx = ax^3 + bx^2 + cx$$

of, als men uit de 2 leden den factor x weglaat,

$$Ax^2 + Bx + C = ax^2 + bx + c$$

Door hierin weer x nul te stellen, vindt men

$$C = c.$$

Zoo kan men voortgaan, en het blijkt dus, dat de coëfficiënten der gelijknamige machten van x gelijk moeten zijn.

Dikwijls zijn de coëfficiënten der verschillende machten van x niet ieder een enkele letter, maar veeltermige vormen met een andere letter, *g* b. v. Indien de 2 vormen dan gelijk zijn voor alle waarden van x en *g*, blijkt volgens de redeneeringen van 't vorige nummer, dat de coëfficiënten der gelijknamige machten van x gelijk moeten zijn voor alle waarden van *g*. En uit dit laatste volgt weér, dat in elke 2 overeenkomstige coëfficiënten de gelijknamige machten van *g* dezelfde coëfficiënten moeten hebben.

Op dezelfde wijze kan men voortgaan voor meer letters, en wij hebben dus algemeen de eigenschap: *Als 2 algebraïsche vormen gelijk zijn voor alle waarden der voorkomende letters, dan bestaan die 2 vormen uit dezelfde termen.*

TOEPASSING VAN DE LEERWIJZE DER ONBEPAALENDE COËFFICIENTEN TOT HET ONTBINDEN IN FACTOREN.

§ 27. Niet alle algebraïsche vormen kunnen volgens deze methode ontbonden worden in factoren. In de meeste gevallen

komt men bij de bepaling der onbepaalde coëfficiënten op hoogere-machtsvergelijkingen. In eenige gevallen kan men deze vermijden, door aan de factoren een bijzonderen vorm te geven.

VOORBEELD. *Ontbind in 2 factoren van den tweeden graad*

$$x^4 - x^2 + 1$$

Stel $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$, of

$$x^4 - x^2 + 1 = x^4 + (A + C)x^3 + (B + D + AC)x^2 + \dots + (AD + BC)x + BD.$$

Daar deze vergelijking identiek is, heeft men

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D + AC &= -1 \\ AD + BC &= 0 \\ BD &= 1. \end{aligned}$$

Uit de eerste verg. volgt $C = -A$, en substitueert men die waarde voor C in de derde verg., dan krijgt men

$$A(D - B) = 0.$$

Hieruit volgt of $A = 0$ of $D = B$.

In het eerste geval heeft men voor de bovenstaande vergelijkingen

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad C = 0 \\ B + D &= -1, \quad BD = 1. \text{ Uit deze 2 volgt} \\ B^2 + 2BD + D^2 &= 1 \\ 4BD &= 4 \end{aligned}$$

$$B^2 - 2BD + D^2 = -3$$

$$\begin{aligned} B - D &= \sqrt{-3} \text{ en } B + D = -1 \text{ dus} \\ B &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad D = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

Men heeft nu

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})(x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$$

In het tweede geval heeft men voor de bovenstaande vergelijkingen

$$\begin{aligned} D &= B \quad A + C = 0 \\ 2B + AC &= -1 \quad B^2 = 1 \end{aligned}$$

Uit de vierde van deze vergelijkingen volgt $B = 1$ en dus is ook volgens de eerste $D = 1$.

Verder is $A + C = 0 \quad AC = -3$

$$\begin{aligned} A^2 + 2AC + C^2 &= 0 \\ 4AC &= -12 \end{aligned}$$

$$A^2 - 2AC + C^2 = 12$$

$$\begin{aligned} A - C &= 2\sqrt{3} \text{ en } A + C = 0. \text{ Dus} \\ A &= \sqrt{3}, \quad C = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

De 2 factoren zijn dus

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + x \sqrt{3} + 1)(x^2 - x \sqrt{3} + 1).$$

§ 28. VOORBEELD. *Ontbind in 2 factoren van den tweeden graad*

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Stelt men hierin voor de factoren $x^2 + Ax + B$ en $x^2 + Cx + D$, dan komt men bij de bepaling van A , B , C en D op hoogere-machtsvergelijkingen.

Stellen wij echter, daar de laatste term van den gegeven vorm 1 is,

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x^2 + Ax + 1)(x^2 + Bx + 1) \text{ of}$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^4 + (A + B)x^3 + (2 + AB)x^2 + (A + B)x + 1, \text{ dan krijgt men ter bepaling van } A \text{ en } B \text{ de drie vergelijkingen}$$

$$A + B = -1$$

$$2 + AB = 1$$

$$A + B = -1$$

Daar echter de eerste en derde vergelijking afhankelijk zijn, heeft men ter bepaling van A en B de 2 vergelijkingen

$$A + B = -1 \quad \text{en} \quad AB = -1$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = 1$$

$$4AB = -4$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = 5$$

$$A - B = \sqrt{5} \quad \text{en} \quad A + B = -1. \text{ Dus}$$

$$A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad B = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Men heeft dus voor de 2 gevraagde factoren

$$x^2 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})x + 1 \quad \text{en} \quad x^2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})x + 1.$$

§ 29. VRAAGSTUKKEN. 1. Ontbind in 3 factoren van den tweeden graad $x^6 - 1$. Evenzoo $x^8 + 1$.

2. Ontbind in 2 factoren van den 2-den graad $x^4 - 6x^2 - 3x + 2$.

3. Evenzoo $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

4. Ontbind in 2 factoren van den derden graad

$$x^6 - 25x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4.$$

TOEPASSING VAN DE LEERWIJZE DER ONBEPAALENDE
COËFFICIENTEN TOT HET SPLITSSEN VAN
BREUKEN IN MEER EENVOUDIGE.

§ 30. Men zegt, dat een breuk gesplitst is in meer eenvoudige breuken, als men 2 of meer breuken bepaald heeft, wier noemers van lageren graad zijn dan de noemer van de eerste breuk, en die door samentelling de eerste breuk opleveren.

Wij letten daarbij alleen op breuken, wier teller van lageren graad is dan de noemer, terwijl de noemer een veeltermige vorm is. Als de teller van hooger en graad is dan de noemer of van denzelfden graad, kan men de breuk beschouwen als de som van een geheel en een breuk, waarin de teller van lageren graad is dan de noemer.

Verder veronderstellen wij, dat de noemer van de gegeven breuk ontbonden zij in factoren van den eersten graad en in factoren van den tweeden graad, die niet kunnen ontbonden worden in reële factoren van den eersten graad.

§ 31. Wij zullen van de verschillende gevallen, die zich bij die splitsing kunnen voordoen, eenige voorbeelden geven. Beschouwen wij als eerste geval, *dat de noemer kan ontbonden worden in onderling verschillende factoren van den eersten graad.*

VOORBEELD. *Te splitsen in eenvoudiger breuken*

$$\frac{x^2 - 8x + 39}{(x - 3)(x + 3)(x - 1)}$$

Stellen wij $\frac{x^2 - 8x + 39}{(x - 3)(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$

dan moeten A , B en C zoodanig bepaald worden, dat deze vergelijking identiek wordt. Vermenigvuldigt men de twee leden met den noemer van het eerste lid, zoo krijgt men

$$x^2 - 8x + 39 = A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 9) \text{ of}$$

$$x^2 - 8x + 39 = (A + B + C)x^2 + (2A - 4B)x + (-3A + 3B - 9C)$$

daar deze verg. identiek moet zijn, heeft men ter bepaling van A , B en C

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 2A - 4B &= -8 \\ -3A + 3B - 9C &= 39 \end{aligned}$$

Men vindt hieruit $A = 2$, $B = 3$ en $C = -4$, zoodat men heeft

$$\frac{x^2 - 8x + 39}{(x-3)(x+3)(x-1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x-1}$$

§ 32. Als er bij de voorgaande oplossing n verschillende factoren in den noemer van de te splitsen breuk zijn, dan neemt men ook n onbekende grootheden A , B , C , D , enz. aan. Verdriift men de noemers uit de 2 leden der komende vergelijking, dan krijgt men in het tweede lid een algebraïsch vorm van den $(n-1)$ den graad. Stelt men de coëfficiënten van de $(n-1)$ machten van x en den geheel bekenden term in dat lid gelijk aan de overeenkomstige getallen in het eerste lid, dan krijgt men daardoor $(n-1) + 1 = n$ vergelijkingen. *Men krijgt dus in het voorgaande geval altijd n vergelijkingen van den eersten graad met evenveel onbekenden.*

Dat men in het voorgaande geval altijd één bepaald stelsel van waarden voor A , B enz. vindt, blijkt uit de volgende oplossing, die eenvoudiger is dan de bovenstaande oplossing.

Maakt men de breuken weg uit de vergelijking

$$\frac{x^2 - 8x + 39}{(x-3)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

dan krijgt men

$$+x^2 - 8x + 39 = A(x+3)(x-1) + B(x-1)(x-3) + C(x-3)(x+3)$$

Stelt men hierin $x = 3$, dan worden de coëfficiënten van B en C nul, die van A niet en men krijgt $24 = 12 A$ of $A = 2$

Stelt men $x = -3$, dan is $72 = 24 B$ of $B = 3$

Stelt men $x = 1$, dan is $32 = -8 C$ of $C = -4$.

§ 33. Beschouwen wij als tweede geval, dat de noemer van de breuk, die men splitsen wil, uit onderling gelijke factoren van den eersten graad bestaat.

VOORBEELD. *Te splitsen in eenvoudiger breuken*

$$\frac{2x^2 + 5x + 3}{(x+2)^3}$$

Stelt men
$$\frac{2x^3 + 5x + 3}{(x+2)^3} = \frac{A}{(x+2)^3} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$$

dan heeft men weer evenveel onbekenden A , B enz. als er factoren van den eersten graad in den gegeven noemer zijn. Verdrijft men de breuken, dan komt er

$$2x^3 + 5x + 3 = A + B(x+2) + C(x+2)^2$$

Stelt men hierin de coëfficiënten der overeenkomstige machten van x en de geheel bekende termen van de 2 leden aan elkaar gelijk, dan krijgt men evenveel vergelijkingen als onbekenden.

$$C = 2$$

$$B + 4C = 5 \text{ en dus } B = -3$$

$$A + 2B + 4C = 3 \text{ en dus } A = 1$$

De oplossing is nu

$$\frac{2x^3 + 5x + 3}{(x+2)^3} = \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$$

§ 34. In de derde plaats kan de noemer van de breuk, die men splitsen wil, uit onderling ongelijke factoren van den tweeden graad bestaan.

VOORBEELD. Te splitsen in eenvoudiger breuken

$$\frac{x^3 + x - 4}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)(3x^2 + 2)}$$

Stel
$$\frac{x^3 + x - 4}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)(3x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{2x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{3x^2 + 2}$$

dan heeft men 6 onbekenden. Verdrijft men de breuken, dan wordt het tweede lid der komende vergelijking een algebraïsche vorm van den vijfden graad. Door de coëfficiënten der 5 machten van x en den geheel bekende term van het tweede lid gelijk te stellen aan de overeenkomstige getallen van het eerste lid, krijgt men 6 vergelijkingen.

Men vindt

$$\begin{aligned} x^3 + x - 4 &= (Ax + B)(2x^2 + 1)(3x^2 + 2) + \dots \\ \dots + (Cx + D)(3x^2 + 2)(x^2 + 1) + (Ex + F)(x^2 + 1)(2x^2 + 1) \text{ of} \\ x^3 + x - 4 &= (6A + 3C + 2E)x^5 + (6B + 3D + 2F)x^4 + \dots \\ \dots (7A + 5C + 3E)x^3 + (7B + 5D + 3E)x^2 + (2A + 2C + E)x + \dots \\ \dots 2B + 2D + F \end{aligned}$$

De breuken verdrijvende krijgt men

$$3 - 2x^2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + \dots \\ \dots + C(x^2+1)x^2 + (Dx+E)x^2(x-1)$$

$$\text{of } 3 - 2x^2 = (B+C+D)x^4 + (A-B-D+E)x^3 + \dots \\ \dots + (-A+B+C-E)x^2 + (A-B)x - A$$

Men heeft dus

$$\begin{aligned} &+ A = -3 \\ &A - B = 0 \text{ dus } B = -3 \\ &-A + B + C - E = -2 \text{ of } C - E = -2 \\ &A - B - D + E = 0 \text{ of } -D + E = 0 \\ &B + C + D = 0 \text{ of } C + D = 3. \end{aligned}$$

Uit de laatste drie vergelijkingen volgt $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{3}{2}$, $E = \frac{3}{2}$ en dus is

$$\frac{3 - 2x^2}{x^2(x-1)(x^2+1)} = \frac{-3}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5x+5}{2(x^2+1)}.$$

§ 37. Het is nu gemakkelijk te laten zien, hoe volgens de voorgaande handelwijze altijd evenveel vergelijkingen verkregen worden, als men onbekenden aanneemt. Nemen wij aan dat er in den noemer is een groep van p ongelijke factoren van den 1^e graad

$$\begin{array}{ccccccc} & & & q & \text{gelijke} & & & 1^{\circ} & \\ & & & r & \text{ongelijke} & & & 2^{\circ} & \\ & & & s & \text{gelijke} & & & 2^{\circ} & \end{array}$$

Dan is den noemer van den graad $p + q + 2r + 2s$. Na de verdrijving der noemers heeft men dan in het tweede lid der komende verg. een algebraïsch vorm van den graad $p + q + 2r + 2s - 1$, en hieruit blijkt, dat men zal hebben

$$p + q + 2r + 2s \text{ vergelijkingen.}$$

Verder neemt men voor de p ongelijke factoren, als noemers beschouwd, ook p onbekenden aan. Eveneens krijgt men voor de q gelijke factoren q onbekenden. Voor de r ongelijke factoren van den tweeden graad, als noemers beschouwd, neemt men $2r$ onbekenden aan; eveneens voor de s gelijke factoren $2s$ onbekenden. Men heeft dus

$$p + q + 2r + 2s \text{ onbekenden.}$$

§ 38. VRAAGSTUKKEN. Splits in eenvoudige breuken

- | | | | |
|----|-------------------------------------|-----|---|
| 1. | $\frac{x}{x^2 - 1}$ | 2. | $\frac{1}{(x - a)(x - b)(x - c)}$ |
| 3. | $\frac{1 - x^2 + 2x}{(3 - x)^2}$ | 4. | $\frac{x^2 - 4x + 3}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)}$ |
| 5. | $\frac{x + 1}{x^3 (x^2 + 1)^2}$ | 6. | $\frac{7x + 8}{(x + 1)^2 (x^2 + x + 1)}$ |
| 7. | $\frac{x^2}{(x - a)^2 (x^3 + a^3)}$ | 8. | $\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^3 (x + 1)^2 (x - 2)}$ |
| 9. | $\frac{7x + 5x^3}{(2x^2 + 3)^3}$ | 10. | $\frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)^3 (x - 1) x^2}$ |

§ 39. GESCHIEDENIS. De methode der onbepaalde coëfficiënten zijn wij verschuldigd aan *Descartes* (1637). Hij vond die methode, toen hij het verband wilde bepalen, dat er tusschen de coëfficiënten van een algebraïschen vorm van een willekeurigen graad moet bestaan, opdat die stelkundige vorm deelbaar zij door het vierkant van een vorm van den eersten graad. *Descartes* heeft die methode ook toegepast tot het ontbinden van een algebraïschen vorm van den vierden graad, waarin geen term van den derden graad voorkomt, in 2 factoren van den tweeden graad; met behulp van die ontbinding heeft *Descartes* eene oplossing der vierdemachts-vergelijkingen gegeven.

HOOFDSTUK III.

REKENKUNDIGE REEKSEN VAN HOOGERE ORDE.

§ 40. Een reeks, waarbij elke term, afgetrokken van den volgenden, hetzelfde verschil oplevert, hebben wij in de rekenkunde een rekenkundige reeks genoemd. Wij zullen zulk een reeks in het volgende een *rekenkundige reeks van de eerste orde* noemen, ter onderscheiding van andere reeksen. Al de bovengenoemde verschillen vormen samen een reeks waaraan men den naam geeft van *de reeks der eerste verschillen*. Bij elke rij van getallen kan men een reeks der eerste verschillen vormen.

Een reeks, waarvan de reeks der eerste verschillen een rekenkundige reeks der eerste orde is, noemt men een *rekenkundige reeks der tweede orde*.

Een reeks, waarvan de reeks der eerste verschillen een rekenkundige reeks der tweede orde is, noemt men een *rekenkundige reeks van de derde orde*.

In 'talgemeen noemt men een *rekenkundige reeks van de $(k + 1)^{de}$ orde*, als de reeks van haar eerste verschillen van de k^{de} orde is.

Al de rekenkundige reeksen van hoogere orde dan de eerste noemt men gezamenlijk *rekenkundige reeksen van hoogere orde*.

Als men bij een rekenkundige reeks van hoogere orde, uit de reeks der eerste verschillen, een reeks van verschillen afleidt, noemt men deze ten aanzien der oorspronkelijke reeks de *reeks der tweede verschillen*.

Evenzoo heeft men reeksen der *derde verschillen*, *vierde verschillen*, enz.

VOORBEELD.	1	8	27	64	125	216
reeks der 1 ^e versch.	7	19	37	61	91	
» » 2 ^e »		12	18	24	30	
» » 3 ^e »			6	6	6	

Hierbij is de reeks der 2^e verschillen een rekenkundige reeks der eerste orde. De reeks der 1^e verschillen is dus een rekenk. reeks der tweede orde; en hieruit volgt weer dat de oorspronkelijke reeks een rekenkundige reeks van de derde orde is.

Bij een rekenkundige reeks van de derde orde heeft men dus 3 reeksen van verschillen. Evenzoo heeft men bij een rekenk. reeks van de n^{de} orde n reeksen van verschillen.

§ 41. Uit de vorige § blijkt tevens hoe men uit de oorspronkelijke reeks de reeksen der verschillen achtereenvolgens kan afleiden.

In het volgende zullen wij nagaan, *hoe men alle termen van een rekenkundige reeks van hoogere orde kan afleiden uit den eersten term van die reeks en de eerste termen van elk der reeksen van verschillen.*

Noemen wij daartoe den eersten term der reeks a , den eersten term van reeks der eerste verschillen b , den eersten term van de reeks der tweede verschillen c , den eersten term der reeks van de derde verschillen d , enz.

Merken wij nu op, dat men den $(p+1)^{\text{den}}$ term van een der reeksen krijgt, door bij den p^{den} term van die reeks den p^{den} term der volgende reeks op te tellen.

Zoo is de 2^e term der oorspronkelijke reeks $a + b$
 de tweede term van de reeks der 1^e verschillen $b + c$
 de » » » » » 2^e » $c + d$.

Evenzoo vindt men

	$a + b$
	$b + c$
de derde term der oorspronkelijke reeks	$a + 2b + c$
	$b + c$
	$c + d$
de derde term van de reeks der 1 ^e verschillen	$b + 2c + d$
	$c + d$
	$d + e$
de derde van de reeks der 2 ^e verschillen	$c + 2d + e$

Uit deze termen kan men weer door optelling afleiden

	$a + 2b + c$
	$b + 2c + d$
de vierde term der oorspronkelijke reeks	$a + 3b + 3c + d$

Evenzoo de vierde term van de reeks
der 1^e versch.

en dus de vijfde term der oorspronke-
lijke reeks

$$b + 3c + 3d + e$$

$$a + 4b + 6c + 4d + e$$

Ten aanzien van al het voorgaande valt op te merken: dat de tweede termen van al de reeksen tweetermige vormen zijn; dat men de derde termen krijgt door telkens 2 tweede termen onder elkaar te schrijven op dezelfde wijze als de gedeeltelijke produkten van $(a + b)^2$ en dat men dus in de derde termen van de verschillende reeksen dezelfde *coëfficiënten* krijgt als in $(a + b)^2$.¹ Evenzoo vindt men de vierde termen der verschillende reeksen, door telkens 2 derde termen op dezelfde wijze onder elkaar te schrijven als de gedeeltelijke produkten van $(a^3 + 3ab^2 + b^3)$ $(a + b)$, zoodat men in de vierde termen dezelfde coëfficiënten krijgt als in $(a + b)^3$, enz.

Verder is in elken term der oorspronkelijke reeks de eerste term a , de tweede een zeker getal maal b , de derde een zeker getal maal c , enz.

Daar het voorgaande algemeen doorgaat, zoo is de x^{de} term der oorspronkelijke reeks

$$T_x = a + \frac{x-1}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}d$$

+ enz.

Voor een rekenkundige reeks van de tweede orde zijn d en alle volgende termen nul, en heeft men dus

$$T_x = a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}c.$$

OPMERKING. Bovenstaande formule van den algemeenen term van een rekenkundige reeks is gemakkelijk te onthouden, als men opmerkt, dat haar 2 eerste termen den algemeenen term voorstellen van een rekenkundige reeks der eerste orde. De andere termen van die formule stelt men dan geleidelijk samen uit de volgende binomiaal-coëfficiënten en de volgende verschillen.

§ 42. Men kan een rekenkundige reeks van hoogere orde

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \text{enz.}$$

beschouwen als de reeks der eerste verschillen van een andere reeks, wier eerste term 0 is. De tweede term van die reeks

is dan

$$0 + a = a$$

De derde term van die reeks is

$$a + a_1$$

De vierde term

$$(a + a_1) + a_2 = a + a_1 + a_2$$

De vijfde term

$$(a + a_1 + a_2) + a_3 = a + a_1 + a_2 + a_3$$

En in het algemeen is de $(x+1)^{\text{de}}$ term van de nieuwe reeks de som van x termen der reeks

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \text{enz.}$$

Voor den $(x+1)^{\text{den}}$ term der nieuwe reeks, of de som van x termen der oorspronkelijke reeks heeft men volgens de vorige §:

$$T_x = 0 + \frac{x}{1} a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \text{enz.}$$

OPMERKING. Deze formule is gemakkelijk te onthouden, als men opmerkt, dat de termen $x \times a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b$ de som van x termen van een rekenkundige reeks der eerste orde voorstellen. De andere termen van die formule stelt men dan geleidelijk samen uit de volgende binomiaal-coëfficiënten en de volgende verschillen.

§ 43. VRAAGSTUKKEN. 1. Bepaal den veertigsten term der reeks

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, \quad \text{enz.}$$

2. Bepaal den 30^{en} term en de som der 25 eerste termen van de reeksen

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 4, & 9, & 16, & & \text{enz.} \\ 14, & 27, & 44, & 65, & & \text{enz.} \\ 2, & 9, & 28, & 65, & 126, & \text{enz.} \\ 10, & 8, & 5, & 4, & & \text{enz.} \end{array}$$

3. Bewijs, dat men een rekenkundige reeks van dezelfde orde, als men eerst had, verkrijgt, als men al de termen van een rekenkundige reeks van hoogere orde met hetzelfde getal vermeerdert.

4. Evenzoo als men alle termen met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

§ 44. In de formule voor den algemeenen term van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde wordt de eerste term der laatste of n^{de} verschillen vermenigvuldigd met $(x-1)(x-2) \dots (x-n)$.

Voert men de aangeduide vermenigvuldigingen in genoemde formule uit, dan krijgt men een term met x^a en daar die term met geen andere kan vereenigd worden en er geen hoogere machten van x in de formule kunnen voorkomen, zoo kan men zeggen: *de x^{de} term van een rekenkundige reeks van den n^{den} orde is een stelskundige vorm, die ten aanzien van x van den n^{den} graad is.*

Omgekeerd zal elke stelskundige vorm van den n^{den} graad den algemeenen term van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde voorstellen. D. w. z.: als men in een stelskundige vorm van den n^{den} graad voor x achtereenvolgens stelt 1, 2, 3, 4, enz., zijn de komende getallen de termen van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde.

Om dit te bewijzen, moet men slechts aantoonen, dat een stelskundige vorm b. v. van den derden graad

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

kan geschreven worden in den vorm

$$a + \frac{x-1}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d.$$

Wij moeten dus laten zien, dat men altijd voor a , b , c en d zulke waarden kan vinden, dat de 2 voorgaande stelskundige vormen identiek zijn, zonder dat d nul is, terwijl men weet, dat D niet nul is. A , B en C kunnen nul zijn. Als men den tweeden der bovenstaande vormen rangschikt volgens de machten van x , krijgt men

$$a - b + c - d + x \left(b - \frac{3}{2} c + \frac{11}{6} d \right) + x^2 \left(\frac{c}{2} - d \right) + x^3 \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

en daar de beide vormen identiek moeten zijn, heeft men ter bepaling van de 4 onbekenden a , b , c , d de 4 vergelijkingen

$$\frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3} = D$$

$$\frac{c}{2} - d = C$$

$$b - \frac{3}{2} c + \frac{11}{6} d = B$$

$$a - b + c - d = A.$$

Men krijgt dus 4 vergelijkingen van den eersten graad met 4 onbekenden, en volkomen op dezelfde wijze krijgt men voor een stelskundigen vorm van elken anderen graad evenveel vergelijkin-

gen als onbekenden. De eenige vraag, die zich nu nog voordoet, is of die vergelijkingen ook tegenstrijdig of afhankelijk kunnen zijn. Dat dit niet het geval is blijkt, als men opmerkt, dat in 1 der vergelijkingen slechts één onbekende voorkomt (hier d), en dat het tweede lid van die vergelijking niet nul is. De eerste term van de laatste reeks der verschillen is dus volkomen bepaald en nooit nul. In de volgende vergelijking komt met de reeds gevonden onbekende nog één andere voor, zoodat ook deze bepaald is. In de volgende vergelijking komen, behalve de 2 onbekenden, die reeds bepaald zijn, nog één onbekende voor, zoodat ook deze bepaald is; enz.

Hiermede is bewezen, dat elke algebraïsche vorm van den n^{den} graad de algemeene term van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde voorstelt.

VOORBEELDEN. De tweede machten van de opeenvolgende geheele getallen 1, 2, 3 enz. stellen een rekenkundige reeks van de tweede orde voor.

De derde machten van die getallen stellen een rekenkundige reeks van de derde orde voor.

§ 45. Daar de algemeene term van een rekenkundige reeks van de p^{de} orde een algebraïsche vorm van den p^{den} graad is, en de algemeene term van een rekenkundige reeks van de q^{de} orde van den q^{den} graad, zoo zullen de produkten der overeenkomstige termen van die 2 rekenkundige reeksen, een reeks opleveren, waarvan de algemeene term voorgesteld wordt door een algebraïschen vorm van den $(p+q)^{\text{den}}$ graad, zoodat de komende reeks een rekenkundige reeks van de $(p+q)^{\text{de}}$ orde is. Wij hebben dus de eigenschap: *als men de termen van een rekenkundige reeks der p^{de} orde vermenigvuldigt met de overeenkomstige termen van een rekenkundige reeks der q^{de} orde, dan vormen de komende produkten de termen van een rekenkundige reeks van de $(p+q)^{\text{de}}$ orde.*

§ 46. Volgens het voorgaande is de algemeene term van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde een algebraïsche vorm van den n^{den} graad. Vervangt men in zulk een vorm x door $p+qx$, dan krijgt men weêr een vorm van den n^{den} graad. Neemt men vervolgens voor x achtereenvolgens 1, 2, 3, 4 enz., dan levert $p+qx$ voor die waarden de termen van een rekenkundige reeks

der eerste orde op, terwijl de tweede vorm van den n^{de} graad de termen van een rekenkundige reeks van de n^{de} orde oplevert. Maar diezelfde termen krijgt men ook, als men de waarden die door $p + qx$ opgeleverd worden substitueert in den oorspronkelijken vorm. Wij hebben dus in woorden de eigenschap: *als men in den algemeenen term van een rekenkundige reeks der n^{de} orde voor x de termen van een rekenkundige reeks der eerste orde substitueert, krijgt men de termen van een rekenkundige reeks der n^{de} orde.*

Stelt men dus in den algemeenen term van een reeks der n^{de} orde voor x achtereenvolgens in de plaats 2, 12, 22, 32; dan krijgt men de termen van een reeks der n^{de} orde. Wij hebben dus als een bijzonder geval van de genoemde eigenschap: *als men van een rekenkundige reeks der n^{de} orde achtereenvolgens eenige termen neemt, telkens met overspringing van een zelfde aantal termen, dan vormen de termen, die men genomen heeft, met elkaar de termen van een rekenkundige reeks der n^{de} orde.*

§ 47. Door het *interpoleeren* tusschen de termen van een rekenkundige reeks van een zekere orde verstaat men het opzoeken van nieuwe termen, die met elkaar en met de termen der oorspronkelijke reeks een rekenkundige reeks van denzelfde orde vormen.

Volgens de voorgaande § behoeft men, om 3 termen te interpoleren tusschen elke 2 opeenvolgende termen van een rekenkundige reeks, in den algemeenen term voor x slechts achtereenvolgens te substitueeren

$$1, \quad 1\frac{1}{4}, \quad 1\frac{3}{4}, \quad 2, \quad 2\frac{1}{4}, \quad 2\frac{3}{4}, \quad 3, \quad \text{enz.}$$

§ 48. Wij hebben vroeger gezien, dat een rekenkundige reeks van de n^{de} orde volkomen bepaald is, als gegeven zijn de eerste term van die reeks en van elk der n reeksen van verschillen: dat zijn in 't geheel $n + 1$ gegevens.

Eenzoo zou zulk een reeks volkomen bepaald zijn, als men haar $n + 1$ eerste termen kende. Men kan dan door achtereenvolgende aftrekkingen van elk der n reeksen van verschillen den eersten term bepalen.

Maar ook is een rekenkundige reeks van de n^{de} orde volkomen bepaald als $n + 1$ termen van die reeks, onverschillig welke ter-

men, gegeven zijn. Laat b. v. gegeven zijn van een reeks van de derde orde de tweede term 26

de vijfde > 215

de zesde > 342

de tiende > 1330.

Voor den algemeenen term der reeks kunnen wij stellen

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Substitueert men hierin voor x achtereenvolgens 2, 5, 6, 10, dan moet men respectievelijk krijgen 26, 215, 342, 1330. Men heeft dus

$$A + 2B + 4C + 8D = 26$$

$$A + 5B + 25C + 125D = 215$$

$$A + 6B + 36C + 216D = 342$$

$$A + 10B + 100C + 1000D = 1330$$

waardoor A, B, C en D bepaald zijn, en dus ook de rekenkundige reeks.

§ 49. Als men de uitkomsten van eenige waarnemingen in getallen heeft uitgedrukt, komt het er somtijds op aan de waarschijnlijke uitkomst te kennen van een andere niet gedane waarneming. Men beschouwt in dat geval de genoemde getallen somtijds als de termen van een rekenkundige reeks van zekere orde. Als men n waarnemingen gedaan heeft, kan men daardoor een reeks van de $n - 1^{\text{de}}$ orde bepalen.

VOORBEELD. *Als de thermometer op een bepaalden dag gestaan heeft: 's morgens om 8 uur op 48° , om 10 uur op 56° , om 12 uur op 62° en om 2 uur op 65° ; hoe hoog heeft dan die thermometer waarschijnlijk gestaan om half een.*

Beschouwen wij 48 als den eersten term, 56 als den tweeden, 62 als den derden en 65 als den vierden term van een rekenkundige reeks, dan zal de waarschijnlijke waarneming om half een verkregen worden, door in den algemeenen term van die reeks te stellen $2\frac{1}{2}$.

OPMERKINGEN. 1. Als de tijden der waarnemingen geweest waren b. v. 9 uur, 10 uur, 12 uur, $2\frac{1}{2}$ uur, dan zou men 9 als overeenkomende met den eersten term beschouwen, 10 met den tweeden, 12 met den vierden en $2\frac{1}{2}$ met den zes-en-een-half-den term.

2. Bij het gebruik van logarithmentafels met 7 of meer decimalen beschouwt men *somtijds* de logarithmen als termen van een rekenkundige reeks der tweede orde, terwijl men *gewoonlijk* de logarithmen beschouwt als termen van een rekenkundige reeks der eerste orde. Zie b. v. Schrön's Logarithmen met 7 decimalen, door Prof. Bierens de Haan.

§ 50. GESCHIEDENIS. Aan de school van Pythagoras wordt de uitvinding der figuurlijke getallen toegeschreven, die rekenkundige reeksen van hoogere orde vormen. Daar de figuurlijke getallen van weinig of geen belang zijn, treden zij hoe langer zoo meer op den achtergrond. Ze zijn dan ook uit deze theorie weggelaten. Pascal heeft reeds de reeksen der figuurlijke getallen verdeeld naar de *orden*, maar de naam »rekenkundige reeksen van hoogere orden» komt eerst in het begin der achttiende eeuw voor bij Lagny (Mém. de Paris, 1722, p. 264).

Een formule van den algemeenen term eener rekenkundige reeks van hoogere orde is door Newton gevonden. Bij Jacob Bernoulli komt die formule reeds in haar tegenwoordige gedaante voor in zijn »Ars conjectandi, 1713."

§ 51. VRAAGSTUKKEN. 1. Bepaal de som der quadraten van alle oneven getallen van 1 tot 100.

2. Bepaal de som der derdemachten van alle getallen van 1 tot en met 40.

3. Welk een reeks krijgt men, als men de termen van een rekenkundige reeks der tweede orde tot de derdemacht brengt?

4. Bepaal een rekenkundige reeks van de tweede orde, waarvan de eerste term 5 is, de derde 22 en de vierde 35.

5. Een kogelstapel heeft de gedaante van een regelmatige vierzijdige pyramide. Als in elke ribbe van het grondvlak 15 kogels liggen, hoeveel kogels bevat de geheele stapel dan?

6. Een kogelstapel heeft de gedaante van een regelmatige driezijdige pyramide. Als in elke ribbe van het grondvlak 14 kogels liggen, hoeveel kogels bevat de stapel dan?

7. Interpoleer 3 termen tusschen elke 2 opeenvolgende termen
6, 13, 23, 36, enz.

8. Als een barometer te 10 uur op 764 *mM* staat, te 11 uur op 769, te 2 uur op 760 en te half vier op 762. Hoe is dan de waarschijnlijke stand te half één?

9. In een langwerpigen kogelstapel, waarvan het grondvlak een rechthoek is, wiens kleinste zijde 6 kogels bevat, liggen in de rug 12 kogels. Hoeveel kogels bevat de geheele stapel?

10. Interpoleer 2 termen tusschen elke 2 opeenvolgende termen der reeks

1, 3, 41, 169, 441, 911.

11. In elke ribbe van een driezijdigen kogelstapel liggen p kogels. Hoeveel kogels bevat de geheele stapel?

12. Evenzoo van een vierzijdigen kogelstapel.

13. Hoeveel kogels liggen in een langwerpigen stapel, als er in de rug p liggen en als de stapel uit k lagen bestaat?

14. Bepaal de som der vierdemachten van de eerste k geheele getallen.



I N H O U D.

— o f f o —

HOOFDSTUK I.

Blz.

✓	Permutatiën en combinatiën	5.
	Binomiaalformule	13.
	Kansrekening	19.

HOOFDSTUK II.

{	Methode der onbepaalde coëfficiënten	26.
	Ontbinden in factoren	27.
	Splitsen van breuken	30.

HOOFDSTUK III.

✓	Rekenkundige reeksen van hoogere orde	36.
---	---	-----

